17.11.15

$M: \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$

$$f \longmapsto \left(f(e_1) \middle| \dots \middle| f(e_n) \right)$$

$$f_A : x \longmapsto Ax \quad \longleftarrow\!\shortmid \quad A$$

allgemein für $f: V \to W$:

Wähle Basen $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ für V $\quad \mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$ für W

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] & W \\
\mathbb{R}^n \arrow[u, "\phi_{\mathcal{B}}", "\wr"'] \arrow[r, "A"'] & \mathbb{R}^m \arrow[u, "\wr", "\phi_{\mathcal{B}'}"']
\end{tikzcd}$$

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} : \mathrm{Hom}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$

$$f \longmapsto M(\phi_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ f \circ \phi_{\mathcal{B}})$$

$$\phi_{\mathcal{B}'} \circ A \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1} \longleftarrow\!\shortmid \; A$$

Gegeben f, was sind die Einträge von $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$?

Schreibe $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \qquad (*)$

$\Rightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = (a_{ij})$

⚠ Andere Basen $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ liefern andere $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}(f)$

<u>Satz 2.10</u>

Für jede Wahl von Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ ist $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-VR.

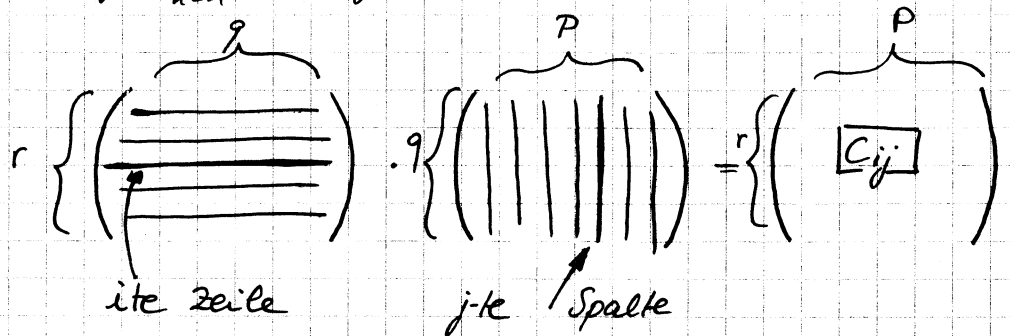
Beweis: Übung

Aus $(*)$ folgt $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ ist linear

Def: $\underset{(a_{ij})}{A} \in Mat(r \times q, \mathbb{R})$, $\underset{(b_{ij})}{B} \in Mat(q \times p, \mathbb{R})$

$$A \cdot B = C = (c_{ij}) \in Mat(r \times p, \mathbb{R})$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}$$



$$c_{ij} = \frac{\text{ite}}{\text{Zeile}} \cdot \Big| \begin{matrix}\text{jte}\\ \text{Spalte}\end{matrix}$$

Bsp.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (20)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}2\\1\end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

im Allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$

Satz 2.11

Seien $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $g: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^r$ lineare Abbildungen.

Dann gilt: $M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$

Umgekehrt: $f_{AB} = f_A \circ f_B$

„Matrizen-Multiplikation $\hat{=}$ Verknüpfung von linearen Abbildungen"

Beweis: $B = M(f)$, $A = M(g)$

$$\underset{(a_{ij})}{A} \cdot \underset{(b_{ij})}{B} = A \cdot \left(b_1 \middle| \dots \middle| b_p \right) = \left(Ab_1 \middle| \dots \middle| Ab_p \right)$$

$$e_i \xmapsto{f} b_i \xmapsto{g} A \cdot b_i$$

$(g \circ f)(e_i) = Ab_i$ = Spaltenvektor von $A \cdot B$

$\Rightarrow M(g \circ f) = A \cdot B$

$$(g \circ f) \cdot (e_i) = g(f(e_i))$$

e_i Einheitsvektoren von $\mathbb{R}^p$

e_i' Einheitsvektoren von $\mathbb{R}^q$

e_i'' Einheitsvektoren von $\mathbb{R}^r$

$$= g\left(\sum_{k=1}^{q} b_{ki} d_k\right)$$

$$= \sum_k b_{ki}\, g(d_k)$$

$$= \sum_k b_{ki} \left(\sum_{j=1}^{r} a_{jk} \boxed{c_j} \right)$$

Vektoren

$$= \sum_j \Big(\underbrace{\sum_k a_{jk} b_{ki}}_{\boxed{c_{ji}}} \Big) \boxed{c_j}$$

$\boxed{c_{ji}}$ mit $A \cdot B = C = (c_{ij})$

Einträge von C

$\Rightarrow M(g \circ f) = A \cdot B$

Rechenregeln:

Seien $\underbrace{A, A'}$, $\underbrace{B, B'}$, $\underbrace{C}$ Matrizen ~~der Größe~~
der Größe $m \times n$ $\quad n \times r \quad r \times s$

a) $A \cdot (B + B') = AB + AB'$ und $(A + A')B = AB + A'B$

b) $A \cdot (\lambda B) = (\lambda A) \cdot B = \lambda \cdot A \cdot B$

c) $(A \cdot B)C = A(BC) = A \cdot B \cdot C$

d) $E_m \cdot A = A \cdot E_n = A$

Einheitsmatrix $E_n = n \overset{n}{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}} \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$

$$\hat{=}\ id: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto x$$

Beweis: Entweder direkt nachrechnen oder Matrizenmultiplikation durch $\circ$ Verknüpfung von Abbildungen ersetzen (Satz 2.11)

Bsp. für c)

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ g: \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n,\ h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$$

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

denn $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

<u>Def.:</u> $A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$ heißt invertierbar, falls es ein $A' \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$ mit $A \cdot A' = A' \cdot A = E_n$

<u>Satz 2.12</u>

Äquivalent sind:

a) A invertierbar

b) $\exists A'$ mit $A' \cdot A = E_n$

c) $\exists A'$ mit $A \cdot A' = E_n$

d) $f_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Isomorphismus

e) $Ker(A) = \{0\}$

f) $rang(A) = n$

Beweis:

$$\begin{tikzcd}
a) \arrow[d, Leftrightarrow, "\substack{\text{Identifikation} \\ Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ = Mat(n \times n, \mathbb{R})}"'] & b) \arrow[d, Leftrightarrow] & c) \arrow[d, Leftrightarrow] & \\
f_A \text{ bijektiv} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow, "\substack{\text{Blatt 4, Nr. 2} \\ \text{Start \& Zielraum} \\ \text{identisch}}"'] & f_A \text{ injektiv} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & f_A \text{ surjektiv} \arrow[d, Leftrightarrow] & \\
d) & Ker(A) = \{0\} & Im(A) = \mathbb{R}^n \arrow[r, Leftrightarrow] & \dim(Im(A)) = n \arrow[d, equal] \\
 & & & rang(A) \arrow[d, Leftrightarrow] \\
 & & & f)
\end{tikzcd}$$

Koordinatentransformation

Seien $A = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ zwei Basen für V

$\overset{!}{\nabla}$ $a_i, b_j \in V$ Vektoren

$$\begin{tikzcd}
 & V & \\
\mathbb{R}^n \arrow[ur, "\phi_A", "\sim"'] \arrow[rr, "\phi_B^{-1} \circ \phi_A"'] & & \mathbb{R}^n \arrow[ul, "\phi_B"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

Koordinatentransformation
zum Basiswechsel A nach $\mathcal{B}$

Def.: Wir nennen $T_B^A = M(\phi_B^{-1} \circ \phi_A) \in GL(n, \mathbb{R})$ die Transformationsmatrix des Basiswechsels A nach $\mathcal{B}$.

T_B^A ist invertierbar mit inverser Matrix $(T_B^A)^{-1} = T_A^B$

$GL(n, \mathbb{R}) \subset Mat(n \times n, \mathbb{R})$

$\quad\; \shortparallel$

$\{$invertierbare Matrizen$\}$

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \longleftarrow\!\shortmid \; A$$
$$x \mapsto Ax$$

ist ein Isomorfismus

17.11.2015

$$\operatorname{img}(f) \cong V / \ker(f)$$

$$M : \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \operatorname{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$$
$$f \longmapsto \big(f(e_1) \,|\, \dots \,|\, f(e_n) \big)$$

$$x \mapsto Ax \longleftarrow\!\shortmid \; A$$

allgemein für $f : V \to W$??

Wähle Basen $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ für V
$\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$ für W

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \arrow[d, bend left, "\Phi_{\mathcal{B}'}^{-1}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^m \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{B}'}"'] \end{tikzcd}$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} : \operatorname{Hom}(V, W) \to \operatorname{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$$
$$f \longmapsto M(\Phi_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{B}})$$

$$\Phi_{\mathcal{B}'} \circ A \circ \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \longleftarrow\!\shortmid \; A$$

Gegeben f, was sind die Einträge von $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$

Schreibe $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$ $\quad (*)$

$$\Longrightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = (a_{ij})$$

⚠ Andere Basen $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ liefern andere $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}(f)$

<u>Satz 2.10</u> Für jede Wahl von Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ ist ~~$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$~~

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} : \operatorname{Hom}(V, W) \to \operatorname{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ ein Isomorfismus von $\mathbb{R}$-VR

Beweis: Übung

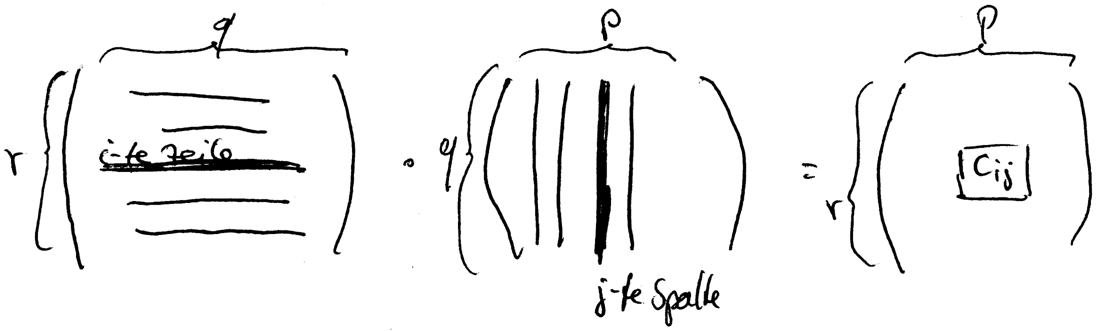
Aus (*) folgt $M^{B}_{B'}$ ist linear

Def: $A \in Mat(r \times q, \mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$

$B \in Mat(q \times p, \mathbb{R})$, $B = (b_{ij})$

$$A \cdot B = C = (c_{ij}) \in Mat(r \times p, \mathbb{R}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}$$



$c_{ij} =$ i-te Zeile $\cdot$ j-te Spalte

Beispiele:

$$(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = (20)$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(2\ 3\ 4) = \begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\4 & 6 & 8\\6 & 9 & 12\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 4\\3 & 10\end{pmatrix}\\[1em] \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 10\\3 & 4\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ i. A.}: \quad AB \neq BA$$

Satz 2.11

Seien $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $g: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ lineare Abb

Dann gilt: $M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$

umgekehrt: $f_{A \cdot B} = f_A \circ f_B$

$\boxed{\text{„Matrizenmultiplikation} \mathrel{\hat{=}} \text{Verknüpfung von linearen Abb"}}$

Beweis: $B = M(f)$, $A = M(g)$

$$A \cdot B = A \left(b_1 | \dots | b_n \right) = \left(Ab_1 | \dots | Ab \right.$$

$$e_i \xmapsto{f} b_i \xmapsto{g} Ab_i$$

$$(g \circ f)(e_i) = Ab_i$$

= Spaltenvektor von AB

$\Rightarrow M(g \circ f) = AB$

$$(g \circ f)(e_i) = g(f(e_i))$$

e_i Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^p$

d_i — " — $\mathbb{R}^q$

c_i — " — $\mathbb{R}^r$

$$= g\left(\sum_{k=1}^{q} b_{ki} d_k\right)$$

$$= \sum_k b_{ki} \, g(d_k)$$

$$= \sum_k b_{ki} \left(\sum_{j=1}^{r} a_{jk} \boxed{c_j} \right)$$

$$= \sum_j \left(\sum_k a_{jk} b_{ki} \right) \boxed{c_j}$$

Vektoren

$\underbrace{}_{}$ $\boxed{c_{ji}}$ mit $A \cdot B = C = (c_{ji})$

Einträge von C

$\Rightarrow M(g \circ f)\ A \cdot B$

Rechenregeln:

Seien $\underbrace{A, A'}_{m\times n}$, $\underbrace{B, B'}_{n\times r}$, $\underbrace{C}_{r\times s}$ Matrizen der Größe

a) $A\cdot(B+B') = AB + AB'$ und $(A+A')B = AB + A'B$

b) $A(\lambda B) = (\lambda A)B =: \lambda AB$

c) $(AB)C = A(BC) =: ABC$

d) $E_m \cdot A = A \cdot E_n = A$

<u>Einheitsmatrix</u> $E_n = \begin{array}{c|c} & n \\ n & \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \in Mat(n\times n, \mathbb{R})$

$\hat{=}\ id: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$x \longmapsto x$

Beweis: Entweder direkt nachrechnen, oder Matrizenmult. durch $\circ$ Verknüpfung von Abb. ersetzen (Satz 2.11)

Bsp für c)

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g: \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$, $h: \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$.

$(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$

denn $((f\circ g)\circ h)(x) = (f\circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$

$(f\circ(g\circ h))(x) = f((g\circ h)(x)) = f(g(h(x)))$

<u>Def.</u> $A \in Mat(n\times n, \mathbb{R})$ heißt <u>invertierbar</u>, falls es ein $A' \in Mat(n\times n, \mathbb{R})$ mit $A\cdot A' = A'\cdot A = E_n$

Satz 2.12 Äquivalent sind

a) A invertierbar

b) $\exists A'$ mit $A' \cdot A = \mathbb{1}$

c) $\exists A'$ mit $A \cdot A = \mathbb{1}$

d) $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Isomorphismus

e) $\ker(A) = \{0\}$

f) $\operatorname{rang}(A) = n$

[$\mathbb{1}$ = Einheitsmatrix]

Beweis:

Identifikation
$\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$

$$\begin{tikzcd}
a) \arrow[d, Leftrightarrow] & b) \arrow[d, Leftrightarrow] & c) \arrow[d, Leftrightarrow] \\
f_A \text{ bijektiv} \arrow[r, Leftrightarrow] & f_A \text{ injektiv} \arrow[r, Leftrightarrow] & f_A \text{ surjektiv} \\
d) \arrow[u, Leftrightarrow] & \ker A = \{0\} \arrow[u, Leftrightarrow] & \operatorname{img}(A) = \mathbb{R}^n \arrow[u, Leftrightarrow]
\end{tikzcd}$$

$\Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im}(A)) = n$

$= \operatorname{rang}(A)$

$\Leftrightarrow f$

Blatt 11/12/2
Start- & Zielraum identisch

Koordinatentransformation

Seien $A = (a_1, \dots, a_n)$, $B = (b_1, \dots, b_n)$ zwei Basen für V.

$\forall a_i, b_j \in V$ Vektoren

$$\begin{tikzcd}
& V & \\
\mathbb{R}^n \arrow[ur, "\Phi_A"] \arrow[rr, "\Phi_B^{-1} \circ \Phi_A"'] & & \mathbb{R}^n \arrow[ul, "\Phi_B"']
\end{tikzcd}$$

Koordinatentransformation zum Basiswechsel
A nach B

Def: Wir nennen

$$T_B^A = M(\Phi_B^{-1} \circ \Phi_A) \in GL(n, \mathbb{R})$$

die Transformationsmatrix des Basiswechsels A nach B

T_B^A ist invertierbar mit inverser Matrix

$$(T_B^A)^{-1} = T_A^B$$

$$GL(n, \mathbb{R}) \subset Mat(n \times n, \mathbb{R})$$

" {invertierbare Matrizen}