20.11.15 $\quad A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$

A invertierbar $\Leftrightarrow \exists A' \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$ mit

$$A \cdot A' = A' \cdot A = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Isomorphismus

$\Rightarrow A'$ ist eindeutig, nämlich Matrix zu Umkehrabbildung von f_A

$A^{-1} := A'$

Koordinatentransformationen

Seien $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ Basen von V

$$\begin{tikzcd}
 & V & \\
\mathbb{R}^n \arrow[ur, "\phi_{\mathcal{A}}", "\sim"'] \arrow[rr, dashed] & & \mathbb{R}^n \arrow[ul, "\phi_{\mathcal{B}}"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

$$T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = M(\phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \phi_{\mathcal{A}}) \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$$

$$T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = M(\phi_{\mathcal{A}}^{-1} \circ \phi_{\mathcal{B}}) = (T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}})^{-1}$$

Konkret:

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} b_i \Rightarrow T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = (\lambda_{ij}) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_{11} & \\ \vdots & \cdots \\ \lambda_{n1} & \end{array} \right)$$

$$\phi_{\mathcal{A}}^{-1}(a_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bsp.: $V = \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

- $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f \in Hom(V, W)$ $\qquad$ $GL(n, \mathbb{R}) = \{\text{invertierbare Matrizen}\}$

$\cap$

A, B Basen für V $\qquad$ $Mat(n \times n, \mathbb{R})$

A', B' Basen für W

Satz 2.13

$$\cdot (T^A_B)^{-1}$$

$$M^B_{B'}(t) = T^{A'}_{B'} \cdot \underbrace{M^A_{A'}(f)}_{\in Mat(\dim W \times \dim V, \mathbb{R})} \cdot T^B_A \quad \text{"kürzt sich weg"}$$

Beweis

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[rr, "T^A_B", "\sim"'] \arrow[dr, "\phi_A", "\sim"'] \arrow[ddd, "M^A_{A'}(f)"'] & & \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\phi_B"', "\sim"] \arrow[ddd, "M^B_{B'}(f)"] \\
& V \arrow[d, "f"] & \\
& W & \\
\mathbb{R}^m \arrow[ur, "\phi_{A'}"] \arrow[rr, "\sim", "T^{A'}_{B'}"'] & & \mathbb{R}^m \arrow[ul, "\phi_{B'}"']
\end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm <u>kommutiert</u> (= verschiedene Wege im Diagramm entsprechen denselben Abbildungen)

$$\phi_{B'}^{-1} \circ f \circ \phi_B = (\phi_{B'}^{-1} \circ \underbrace{\phi_{A'}) \circ (\phi_{A'}^{-1}}_{id} \circ f \circ \underbrace{\phi_A) \circ (\phi_A^{-1}}_{id} \circ \phi_B)$$

jetzt M anwenden (und Satz 2.11)

$$M^B_{B'}(f) = T^{A'}_{B'} \cdot M^A_{A'}(f) \cdot T^B_A$$

Merke: $B = S \cdot A \cdot T^{-1}$ $\qquad$ $S, T \in GL(n, \mathbb{R})$

jetzt: $f \in End(V)$, $f: V \to V$

Seien A, B Basen von V $\quad M_A(f) = M_A^A(f)$

Korollar 2.14.

$$M_B(f) = T_B^A M_A(f) T_A^B = T_B^A \cdot M_A(f) \cdot (T_B^A)^{-1}$$

Merke: $B = T \cdot A \cdot T^{-1}$ $\quad T \in GL(n, \mathbb{R})$

$A, B \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$

Def: Seien $A, B \in Mat(n \times m, \mathbb{R})$

A und B äquivalent $:\Leftrightarrow \exists S, T \in GL(n, \mathbb{R})$ mit $B = S \cdot A \cdot T^{-1}$

- Wenn $n = m$

A und B ähnlich $:\Leftrightarrow \exists T \in GL(n, \mathbb{R})$
$B = T \cdot A T^{-1}$

Satz 2.15

Für jedes $f: V \to W$ existieren Basen B von V, B' von W, so dass

$$M_{B'}^{B}(f) = n\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)}_{m}\Big\}r$$

$m = \dim V$

$n = \dim W$

Korollar 2.16

Jedes $A \in Mat(n \times m, \mathbb{R})$ ist äquivalent zu $\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ mit $[r = rang(A)]$ für geeignetes r.

Beweis Satz 2.15

Wähle Basis $(v_1, \dots, v_k)$ von $Ker(f)$

Ergänze zu Basis von V, $B = (u_1, \dots, u_\ell, v_1, \dots, v_{\ell_2})$

Betrachte $w_i := f(u_i) \Rightarrow (w_1, \dots, w_\ell)$ lin. unabh., denn:

$$0 = \sum \lambda_i w_i = \sum \lambda_i f(u_i) = f(\underbrace{\sum \lambda_i u_i}_{\in Ker(f)})$$

$\sum \lambda_i u_i = \sum \mu_j v_j \Rightarrow \sum \lambda_i u_i - \sum \mu_j v_j = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_\ell = \mu_1 = \ldots \mu_\ell = 0$

Ergänze zu Basis von W
$B' = (w_1, \ldots, w_\ell, x_1, \ldots, x_n)$

$$M^B_{B'}(f) = \left(e_1 \middle| \ldots \middle| e_\ell \middle| 0 \right) = \left(\begin{array}{c|c} E_\ell & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

Satz 2.17

Sei $A \in Mat(n \times m, \mathbb{R})$

$dim(ZR(A)) = dim(SR(A))$

In Worten: Zeilenrang = Spaltenrang =: Rang

Wir Brauchen die transponierte Matrix

$A \in Mat(n \times m, \mathbb{R})$ $\quad A^t \in Mat(n \times m, \mathbb{R})$

$\in (a_{ij})$ $\quad \parallel (a^t_{ij})$

mit $a^t_{ij} := a_{ji}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Spiegeln an der Diagonalen

Rechenregeln

1) $(A+B)^t = A^t + B^t$

2) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t \neq A^t \cdot B^t$

$\underset{A}{(-)} \; \underset{B}{(|)} \qquad \underset{B^t}{(-)} \; \underset{A^t}{(|)}$

$A \cdot B = (c_{ij})$ $\quad A = (a_{ij})$

$(A \cdot B)^t = (c_{ji})$ $\quad B = (b_{ij})$

$c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}$

$= \sum_k b_{ki} a_{jk} = \sum_k b^t_{ik} a^t_{kj}$

20.11.2015

$\dim \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist Unsinn, da Vektor keine Dimension hat

---

$A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$

A invertierbar $\Longleftrightarrow \exists A' \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$

mit $A A' = A' A = \mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Isomorphismus

$\Longrightarrow A'$ ist eindeutig, nämlich Matrix zu Umkehrabbildung von f_A

$A^{-1} := A'$

Koordinatentransformationen

Seien $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ Basen von V

$$\begin{tikzcd} & V & \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "\Phi_A", "\sim"'] \arrow[rr, shift right, "\Phi_B^{-1} \circ \Phi_A"'] & & \mathbb{R} \arrow[ul, "\Phi_B"', "\sim"] \arrow[ll, shift right, "\Phi_A^{-1} \circ \Phi_B"'] \end{tikzcd}$$

$T_B^A = M(\Phi_B^{-1} \circ \Phi_A) \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$

$T_A^B = M(\Phi_A^{-1} \circ \Phi_B) = (T_B^A)^{-1}$

Konkret:

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} b_i \Longrightarrow T_B^A = (\lambda_{ij}) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_{11} & \\ \vdots & \dots \\ \lambda_{n1} & \end{array} \right)$$

$$\Phi_A^{-1}(a_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bsp: $V = \mathbb{R}^2$

$\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T_B^A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T_A^B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Probe: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ✓$$

$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$

$GL(n, \mathbb{R}) = \{\text{invertierbare Matrizen}\}$

(Generelle lineare Gruppe)

$\left(GL(n, \mathbb{R}) \subset Mat(n \times n, \mathbb{R}) \right)$

A, B Basen für V

A', B' Basen für W

<u>Satz 2.13</u>

$M^A_{A'}(f) \in Mat(\dim W \times \dim V, \mathbb{R})$

$$M^B_{B'}(f) = T^{A'}_{B'} \, M^A_{A'}(f) \, T^B_A$$

Beweis:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[rr, "T^A_B", "\simeq"'] \arrow[dr, "\phi_A"'] \arrow[ddd, "M^A_{A'}(f)"'] & & \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\phi_B"] \arrow[ddd, "M^B_{B'}(f)"] \\
& V \arrow[d, "f"] & \\
& W & \\
\mathbb{R}^m \arrow[rr, "T^{A'}_{B'}"', "\simeq"] \arrow[ur, "\phi_{A'}"] & & \mathbb{R}^m \arrow[ul, "\phi_{B'}"']
\end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm <u>kommutiert</u>

(d.h.: Verschiedene Wege im Diagramm entsprechen denselben Abbildungen)

$$\phi_{B'}^{-1} \circ f \circ \phi_B = (\phi^{-1}_{B'} \circ \underbrace{\phi_{A'}) \circ (\phi_{A'}^{-1}}_{id} \circ f \circ \underbrace{\phi_A) \circ (\phi_A^{-1}}_{id} \circ \phi_B)$$

Jetzt M anwenden (und Satz 2.11)

$$M_{B'}^{B}(f) = T_{B'}^{A'} \cdot M_{A'}^{A}(f) \cdot T_{A}^{B}$$

Merke: $B = S A \cdot T^{-1}$

$S, T \in GL(n, \mathbb{R})$

Jetzt: $f \in \mathrm{End}(V)$. $f: V \to V$

Seien A, B Basen von V

$$M_A(f) = M_A^A(f)$$

Korollar 2.14

$$M_B(f) = T_B^A \, M_A(f) \, T_A^B = T_B^A \cdot M_A(f) \cdot (T_B^A)^{-1}$$

Merke: $B = TAT^{-1}$ $\quad T \in GL(n, \mathbb{R})$

$A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$

Definition: Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$

A und B äquivalent $:\Longleftrightarrow$ $\exists\, S, T \in GL(n, \mathbb{R})$ mit $B = S \cdot A \cdot T^{-1}$

wenn $n = m$

A und B ähnlich $:\Longleftrightarrow$ $\exists\, T \in GL(n, \mathbb{R})$ $B = T \cdot A T^{-1}$

Satz 2.15 Für jedes $f: V \to W$ existieren Basen B von V, B' von W, so dass

$$M_{B'}^{B}(f) = n\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\Big\}\, r \qquad \begin{array}{l} m = \dim V \\ n = \dim W \end{array}$$

$$\underbrace{}_{r}\ \underbrace{}_{m}$$

<u>Korollar 2.16</u> Jedes $A \in Mat(n\times m, \mathbb{R})$ ist äquivalent zu $\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ [mit $r = \text{rang}(A)$]

für geeignetes r.

Beweis Satz 2.15

Wähle Basis von $\ker(f)$ $(v_1, \dots, v_k)$

Ergänze zu Basis von V

$(u_1, \dots, u_\ell, v_1, \dots, v_k)$

Betrachte $w_i := f(u_i) \to (w_1, \dots, w_\ell)$ lin. unabh.

denn: $0 = \sum \lambda_i w_i = \sum \lambda_i f(u_i) = f(\underbrace{\sum \lambda_i u_i}_{\in \ker(f)})$

$\sum \lambda_i u_i = \sum \mu_j v_j \to \sum \lambda_i u_i - \sum \mu_j v_j = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_\ell = \mu_1 = \dots = \mu_\ell = 0$

Ergänze zu Basis von W

$B' = (w_1, \dots, w_\ell, x_1, \dots, x_n)$

$$M^B_{B'}(f) = \left(e_1 \middle| \dots \middle| e_\ell \middle| 0 \right) = \left(\begin{array}{c|c} E_\ell & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \qquad E_\ell \equiv \mathbb{1}_\ell$$

<u>Satz 2.17.</u> Sei $A \in Mat(n\times m, \mathbb{R})$

$$\dim(\underset{\text{Zeilenraum}}{ZR(A)}) = \dim(\underset{\text{Spaltenraum}}{SR(A)})$$

In Worten: Zeilenrang = Spaltenrang =: Rang

Brauchen die <u>transponierte Matrix</u>

$A \in Mat(n\times m, \mathbb{R})$ $\quad A^T \in Mat(m\times n, \mathbb{R})$

(a^T_{ij})

mit $a^T_{ij} = a_{ji}$

46

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Spiegeln an der Diagonalen

Rechenregeln:

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$

2) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \neq A^T \cdot B^T$!

$$\underset{A}{(-)}\ \underset{B}{(\,|\,)} \qquad \underset{B^T}{(-)}\ \underset{A^T}{(\,|\,)}$$

$A \cdot B = c_{ij}$

$(A \cdot B)^T = (c_{ji})$

$A = (a_{ij})$

$B = (b_{ij})$

$$c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_k b_{ki} a_{jk} = \sum_k b_{ik}^T a_{kj}^T$$