

20.11.15

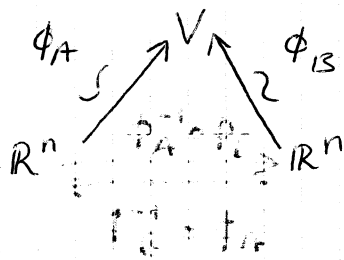
 $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ A invertierbar $\Leftrightarrow \exists A' \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ mit

$$A \cdot A' = A' \cdot A = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \downarrow A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ Isomorphismus}$$

 $\Rightarrow A'$ ist eindeutig, nämlich Matrix zu Umkehrabbildung von $\downarrow A$

$$A^{-1} := A'$$

KoordinatentransformationenSeien $A = (a_1, \dots, a_n)$, $B = (b_1, \dots, b_n)$ Basen von V 

$$T_B^A = M(\phi_B^{-1} \circ \phi_A) \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$$

$$T_A^B = M(\phi_A^{-1} \circ \phi_B) = (T_B^A)^{-1}$$

Konkret:

$$a_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} b_i \Rightarrow T_B^A = (\lambda_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots \\ \vdots & \dots \\ \lambda_{n1} & \dots \end{pmatrix}$$

$$\phi_A^{-1}(a_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bsp.: $V = \mathbb{R}^2$

$$A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad B = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T_A^B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T_B^A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f \in \text{Hom}(V, W)$$

A, B Basen für V

A', B' Basen für W

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{ \text{invertierbare Matrizen} \}$$

$$\text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$$

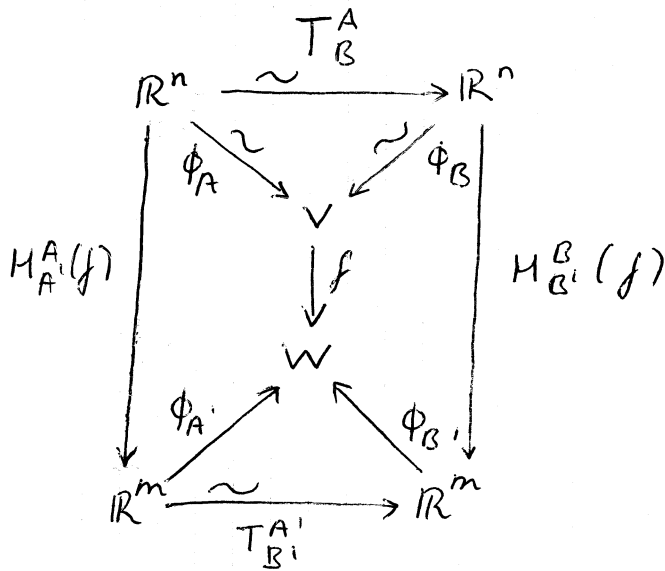
Satz 2.13

$$\cdot (T_B^A)^{-1}$$

$$M_{B'}^B(f) = T_{B'}^{A'} \cdot M_{A'}^A(f) \cdot T_A^B \quad \text{"kürzt sich weg"}$$

$\in \text{Mat}(\dim W \times \dim V, \mathbb{R})$

Beweis



Dieses Diagramm kommutiert (= verschiedene Wege im Diagramm entsprechen denselben Abbildungen)

$$\phi_{B'}^{-1} \circ f \circ \phi_B = \underbrace{(\phi_{B'}^{-1} \circ \phi_{A'})}_{id} \circ \underbrace{(\phi_{A'}^{-1} \circ f \circ \phi_A)}_{id} \circ \phi_B$$

Jetzt M anwenden (und Satz 2.11)

$$M_{B'}^B(f) = T_{B'}^{A'} \cdot M_{A'}^A(f) \cdot T_A^B$$

Merke: $B = S \cdot A \cdot T^{-1} \quad S, T \in GL(n, \mathbb{R})$

Jetzt: $f \in \text{End}(V)$, $f: V \rightarrow V$

Seien A, B Basen von V : $M_A(f) = M_A^A(f)$

Korollar 2.14.

$$M_B(f) = T_B^A M_A(f) T_A^B = T_B^A \cdot M_A(f) \cdot (T_B^A)^{-1}$$

Merke: $B = T \cdot A \cdot T^{-1}$ $T \in GL(n, \mathbb{R})$

$$A, B \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$$

Def: Seien $A, B \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$

A und B äquivalent: $\Leftrightarrow \exists S, T \in GL(n, \mathbb{R})$ mit $B = S \cdot A \cdot T^{-1}$

• Wenn $n = m$

A und B ähnlich: $\Leftrightarrow \exists T \in GL(n, \mathbb{R})$
 $B = T \cdot A \cdot T^{-1}$

Satz 2.15

Für jedes $f: V \rightarrow W$ existieren Basen B von V , B' von W , so dass

$$M_{B'}^B(f) = n \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}} \right\} r \quad \begin{array}{l} m = \dim V \\ n = \dim W \end{array}$$

Korollar 2.16

Jedes $A \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ ist äquivalent zu $\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ mit $[r = \text{rang}(A)]$ für geeignetes r .

Beweis Satz 2.15

Wähle Basis (v_1, \dots, v_k) von $\text{Ker}(f)$

Ergänze zu Basis von V , $B = (u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_k)$

Betrachte $w_i := f(u_i) \Rightarrow (w_1, \dots, w_r)$ lin. unabh., denn:

$$0 = \sum \lambda_i w_i = \sum \lambda_i f(u_i) = f\left(\sum \lambda_i u_i\right) \in \text{Ker}(f)$$

$$\sum \lambda_i u_i = \sum \mu_j v_j \Rightarrow \sum \lambda_i u_i - \sum \mu_j v_j = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = \mu_1 = \dots = \mu_p = 0$$

Ergänze zu Basis von W
 $B' = (w_1, \dots, w_p, x_1, \dots, x_n)$

$$M_{B'}^B(f) = \left(\begin{array}{c|ccc|c} e_1 & & & \\ \dots & & & \\ e_p & & & \\ \hline & & & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} E_p & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

Satz 2.17

Sei $A \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$

$$\dim(\text{ZR}(A)) = \dim(\text{SR}(A))$$

In Worten: Zeilenrang = Spaltenrang =: Rang

Wir brauchen die transponierte Matrix

$A \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$

$A^t \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$

(a_{ij})

(a_{ij}^t)

mit $a_{ij}^t := a_{ji}$

$$\begin{pmatrix} \cancel{x} & 2 & 3 \\ 4 & \cancel{5} & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Spiegeln an der Diagonalen

Rechenregeln

1) $(A+B)^t = A^t + B^t$

2) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t \neq A^t \cdot B^t$

$$\begin{pmatrix} - \\ A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ B^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ A^t \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = (c_{ij})$$

$$A = (a_{ij})$$

$$(A \cdot B)^t = (c_{ji})$$

$$B = (b_{ij})$$

$$c_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki}$$

$$= \sum_k b_{ki} a_{jk} = \sum_k b_{ik}^t a_{kj}^t$$

20.11.2015

$\dim \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist falsch, da Vektor keine Dimension hat

$A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$

A invertierbar $\Leftrightarrow \exists A' \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$

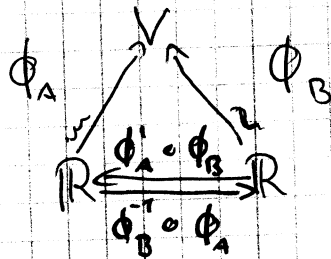
mit $A \cdot A' = A' \cdot A = \mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Isomorphismus

$\Rightarrow A'$ ist eindeutig, nämlich Matrix zur Umkehrabbildung von f_A
 $A^{-1} := A'$

Koordinatentransformationen

Seien $A = (a_1, \dots, a_n)$, $B = (b_1, \dots, b_n)$ Basen von V



$T_B^A = M(\phi_B^{-1} \circ \phi_A) \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$

$T_A^B = M(\phi_A^{-1} \circ \phi_B) = (T_B^A)^{-1}$

Konkret:

$a_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} b_i$

\Rightarrow

$T_B^A = (\lambda_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$

$\phi_A^{-1}(a_n) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Bsp: $V = \mathbb{R}^2$

$A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $B = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T_B^A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T_A^B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Probe: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

$f \in \text{Hom}(V, W)$

$GL(n, \mathbb{R}) = \{ \text{invertierbare Matrizen} \}$
 (Generelle lineare Gruppe)

$\begin{pmatrix} GL(n, \mathbb{R}) \\ \subset \\ Mat(n \times n, \mathbb{R}) \end{pmatrix}$

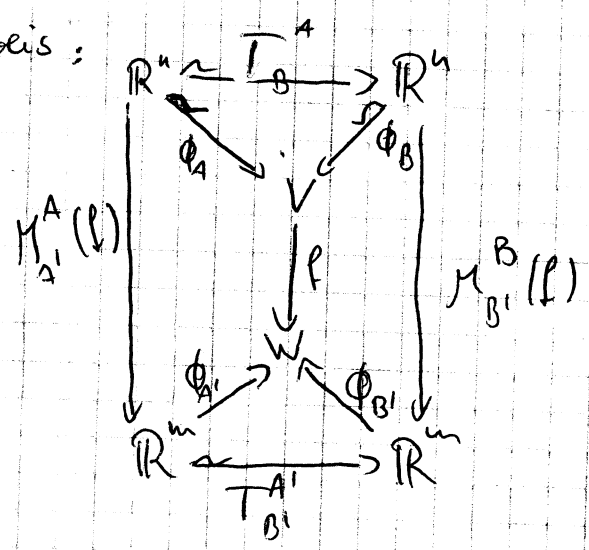
A, B Basen für V
 A', B' Basen für W

Satz 2.13

$M_{A'}^A(f)$
 \rightarrow
 $\in Mat(\dim W \times \dim V, \mathbb{R})$

$M_{B'}^{B'}(f) = T_{B'}^{A'} \cdot M_{A'}^A(f) \cdot T_A^{B'}$

Beweis:



Dieses Diagramm
kommutiert
 (d.h.: Verschiedene Wege im
 Diagramm entsprechen
 denselben Abbildungen.)

$\phi_{B'}^{-1} \circ f \circ \phi_B = (\underbrace{\phi_{B'}^{-1} \circ \phi_{A'}}_{id}) \circ (\underbrace{\phi_A^{-1} \circ f \circ \phi_A}_{id}) \circ (\phi_A^{-1} \circ \phi_B)$

Jetzt M anwenden (und Satz 2.11)

$$M_{B'}^B(f) = T_{B'}^A \cdot M_A^A(f) \cdot T_A^B$$

Merke: $B = S \cdot A \cdot T^{-1}$
 $S, T \in GL(n, \mathbb{R})$

Jetzt: $f \in \text{End}(V)$. $f: V \rightarrow V$

Seien A, B Basen von V

$$M_A(f) = M_A^A(f)$$

Korollar 2.14

$$M_B(f) = T_B^A \cdot M_A(f) \cdot T_A^B = T_B^A \cdot M_A(f) \cdot (T_B^A)^{-1}$$

Merke: $B = T \cdot A \cdot T^{-1}$ $T \in GL(n, \mathbb{R})$
 $A, B \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$

Definition: Seien $A, B \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$

A und B äquivalent $:\Leftrightarrow \exists S, T \in GL(n, \mathbb{R})$
mit $B = S \cdot A \cdot T^{-1}$

Wenn $n = m$

A und B ähnlich $:\Leftrightarrow \exists T \in GL(n, \mathbb{R})$
 $B = T \cdot A \cdot T^{-1}$

Satz 2.15 Für jedes $f: V \rightarrow W$ existieren Basen B von V , B' von W so dass

$$M_{B'}^B(f) = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \overset{1}{E}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)}_{\substack{r \quad m}} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} \overset{1}{E}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} m = \dim V \\ n = \dim W \end{array}$$

Korollar 2.16 Jedes $A \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ ist äquivalent ^(L. 5)

$$\text{zu } \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \text{ [mit } r = \text{rang}(A)]$$

für geeignetes r .

Beweis Satz 2.15

Wähle Basis von $\ker(f)$
(v_1, \dots, v_k)

Ergänze zu Basis von V
($u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_k$)

Betrachte $w_i = f(u_i) \rightarrow (w_1, \dots, w_r)$ lin. unabh.

denn: $0 = \sum \lambda_i w_i = \sum \lambda_i f(u_i) = f(\sum \lambda_i u_i)$

$$\sum \lambda_i u_i = \sum u_{ij} v_j \rightarrow \sum \lambda_i u_i - \sum \mu_j v_j = 0 \quad \leftarrow \in \ker(f)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_r = \mu_1 = \dots = \mu_k = 0$$

Ergänze zu Basis von W

$$B' = (w_1, \dots, w_r, x_1, \dots, x_k)$$

$$M_{B'}^{B'}(f) = \left(\begin{array}{c|c} e_1 & \dots & e_r & 0 \\ \hline & & & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{|l} \hline E_r \equiv \mathbb{1}_r \\ \hline \end{array}$$

Satz 2.17 Sei $A \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$

$$\dim(\underbrace{\text{ZR}(A)}_{\text{Zeilenraum}}) = \dim(\underbrace{\text{SR}(A)}_{\text{Spaltenraum}})$$

Zu Worten: Zeilenrang = Spaltenrang =: Rang

Brauchen die transponierte Matrix

$$A \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{R}) \quad A^T \in \text{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$$

(a_{ij}^T)

mit $a_{ij}^T = a_{ji}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

46

Spiegeln an der Diagonalen

Rechenregeln:

$$1) (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$2) (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \neq A^T \cdot B^T !$$

$$\begin{pmatrix} - \\ A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ B \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} - \\ B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ A^T \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = c_{ij}$$

$$(A \cdot B)^T = (c_{ji})$$

$$A = (a_{ij})$$

$$B = (b_{ij})$$

$$c_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = \sum_k b_{ki} a_{jk} = \sum_k b_{ik}^T a_{kj}^T$$

