24.11.15

Satz 2.17

$A \in Mat(n \times m, \mathbb{R})$

Dann gilt: $\dim(ZR(A)) = \dim(SR(A))$

Spaltenrang = Zeilenrang = rang(A)

Beweis: Wir wissen bereits:

1) A ist äquivalent zu $\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

2) Behauptung gilt für $\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

Noch zu zeigen:

A und B äquivalent (d.h. $\exists$ S, T invertierbar mit $B = SAT^{-1}$)

$\Rightarrow$ 1) $\dim(SR(A)) = \dim(SR(B))$

2) $\dim(ZR(A)) = \dim(ZR(B))$

zu 1): sei also $B = SAT^{-1}$ (*)

Dann liefert S einen Isomorphismus

$$S: Im(A) \xrightarrow{\sim} Im(B)$$
$$x \longmapsto Sx$$

mit Umkehrabbildung $S^{-1}: Im(B) \to Im(A)$

$\Rightarrow SR(A) = Im(A) \cong Im(B) = SR(B)$

$\Rightarrow$ 1)

zu 2) Wir transponieren (*)

$$B^t = (T^{-1})^t A^t S^t$$

$\Rightarrow$ B^t und A^t sind äquivalent

$SR(B^t) = ZR(B)$ und $SR(A^t) = ZR(A)$

$\Rightarrow$ 2) folgt aus 1)

Zeilenumformungen revisited

$P_{ij},\ S_i(\lambda),\ A_i^j(\lambda) \in Mat(n \times n, R)$

$i, j \in \{1, \dots, n\},\ i \neq j,\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$P_{ij} = \begin{array}{r} \\ \\ i \to \\ \\ j \to \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & 1 & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & i & & j & & \end{array}$$

$$S_i(\lambda) = \begin{array}{r} \\ i \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{c} i \end{array}$$

$\lambda \neq 0$

$$A_i^j(\lambda) = \begin{array}{r} \\ i \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \cdots & 1 & \cdots & \lambda & \cdots \\ & & \ddots & \vdots & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Diese Matrizen heißen Elementarmatrizen

Fakt: Sei $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \hline \vdots \\ \hline a_n \end{pmatrix} \in Mat(n \times m, R)$

Dann gilt:

1) $P_{ij} \cdot A \mathrel{\hat{=}}$ Vertauschen der Zeilen a_i und a_j

2) $S_i(\lambda) \cdot A \mathrel{\hat{=}}$ Skalieren der Zeile a_i

3) $A_i^j(\lambda) \cdot A \mathrel{\hat{=}}$ Addieren von λa_j zur Zeile a_i

Zeilenumformungen

Bem.: $A \in Mat(m \times n, R)$

$A \cdot P_{ij},\ A \cdot S_i(\lambda),\ A \cdot A_i^j(\lambda)$

Spaltenumformungen

Fakt: Alle Elementarmatrizen sind invertierbar

$(P_{ij})^{-1} = P_{ij}$

$\lambda \neq 0 \quad (S_i(\lambda))^{-1} = S_i(\tfrac{1}{\lambda})$

$(A_i^j(\lambda))^{-1} = A_i^j(-\lambda)$

Bem.: $T \in GL(n, \mathbb{R})$

$$Ax = b \Leftrightarrow TAx = Tb$$

Satz 2.18

Jedes $A \in GL(n, \mathbb{R})$ lässt sich als (endliches) Produkt von Elementarmatrizen schreiben.

Beweis Wir wissen: Sei $A \in Mat(n \times m, \mathbb{R})$

(Blatt 5, Nr. 1) A lässt sich durch Zeilenumformungen auf verfeinerte ZSF bringen.

$\Rightarrow B_1 \dots B_r\ A = (\overset{\text{verf.}}{ZSF})$ mit B_i Elementarmatrizen.

Jetzt: $A \in GL(n, \mathbb{R})$

A invertierbar $\Leftrightarrow rang(A) = \dim Im(A) = n$

Sei B verfeinerte ZSF von $A \Rightarrow rang(B) = n$

$$r\left\{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\right. \quad \text{mit } r = \dim(ZR(B)) \overset{2.17}{=} \dim(SR(B)) = rang\, B = n$$

$\Rightarrow B$ ist quadratisch, in verf. ZSF und hat n Stufen

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A = B_r^{-1} \dots B_1^{-1}$ Produkt von Elementarmatrizen.

Berechnung von inversen Matrizen

(siehe oben $A^{-1} = B_1 \dots B_r$)

INPUT: $A \in GL(n, \mathbb{R}) \rightsquigarrow$ OUTPUT: A^{-1}

Methode:

1) Bilde $n(\overset{2n}{A \mid E_n}) \in Mat(n \times 2n, \mathbb{R})$
2) GA damit

$$\rightsquigarrow (E_n \mid \underset{B_1 \dots B_r}{\underset{\shortparallel}{A^{-1}}})$$

Bsp: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 7 & 1 & & \\ 2 & 5 & 10 & & 1 & \\ 3 & 7 & 14 & & & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & -5 & 3 & 0 \\ & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ & & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 0 & -7 & 5 \\ & 1 & & -2 & 7 & -4 \\ & & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

3. Determinanten

Bsp $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Mat(2 \times 2, \mathbb{R})$

hat $Ax = b$ eine eindeutige Lösung?

$Ax = b$ hat eindeutige Lösung $\forall b \in \mathbb{R}^2$ $\iff$ A investierbar $\iff$ $\ker A = \{0\}$ $\iff$ $\operatorname{rang}(A) = 2$

$\Updownarrow$ Präsenzblatt

$\det(A) := ad - bc \neq 0$

Beweis: OBdA $a \neq 0$

GA: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & b \\ ca & da \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \underbrace{da - bc}_{= \det(A)} \end{pmatrix}$

allgemein: suchen Abbildung

$$\det : \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

mit A inv $\iff \det(A) \neq 0$

$$\Updownarrow \qquad \Updownarrow$$

$Ax = b$ hat eind. Lösung $\forall b \in \mathbb{R}^n$.

(A) Permutationen

Def.: Eine bijektive Abbildung $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ heißt Permutation.

Die Menge aller Permutationen heißt symmetrische Gruppe

Schreibweise: S_n

Notation: $\sigma := \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{bmatrix}$

Bsp

1) $id = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & n \end{bmatrix}$

2) $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in S_3$ $\qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \notin S_3$

$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

3) $\sigma, \tau \in S_n$ $\qquad \sigma \circ \tau \in S_n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Schreibweise: $\sigma \circ \tau = \sigma\, \tau$

$= \sigma\tau$

4) $\sigma \in S_n \Rightarrow$ Umkehrabb. $\sigma^{-1} \in S_n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

5) <u>Zykel</u> $z = (a_1, a_2, \dots, a_k)$, $a_i \in \{1, \dots n\}$

a_i paarweise verschieden $:\Leftrightarrow a_i = a_j \Rightarrow i = j$

$$z(a) = \begin{cases} a_{i+1}, & a = a_i \\ a_1 & a = a_k \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

$$z = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k & \text{restl. } a \\ a_2 & a_3 & \dots & a_k & a_1 & a \end{bmatrix}$$

k = Länge des Zykels

$(2\,4) \in S_5$

$$(2\,4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Länge 1: $(a) = id.$

Länge 2 $(a_1\, a_2)$ Transpositionen vertauschen a_i und a_j

$(1\,2\,3) = (2\,3\,1) = (3\,1\,2)$

$(1\,2)(2\,3) = (1\,2\,3)$

$\neq$

$(2\,3)(1\,2) = (1\,3\,2)$

nicht kommutativ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

spiegeln an der Diagonalen

Rechenregeln:

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$

2) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \neq A^T \cdot B^T$!

$\underset{A}{(-)}\ \underset{B}{(|)}\qquad \underset{B^T}{(-)}\ \underset{A^T}{(|)}$

$A \cdot B = c_{ij}$

$(A \cdot B)^T = (c_{ji})$

$A = (a_{ij})$

$B = (b_{ij})$

$c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_k b_{ki} a_{jk} = \sum_k b^T_{ik} a^T_{kj}$

Satz 2.17

$A \in Mat(n \times m, \mathbb{R})$

Dann gilt: $\dim(ZR(A)) = \dim(SR(A))$

Spaltenrang = Zeilenrang = rang(A)

Beweis: wir bereits:

1) A ist äquivalent zu $\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ I

2) Behauptung gilt für $\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

Noch zu zeigen:

A und B äquivalent

(d.h. $\exists S, T$ invertierbar mit $B = SAT^{-1}$) $\Rightarrow$ 1) $\dim(SR(A)) = \dim(SR(B))$

2) $\dim(ZR(A)) = \dim(ZR(B))$

zu 1) Sei also $B = SAT^{-1}$ (*)

Dann liefert S ~~liefert~~ einen Isomorphismus

$$S : img(A) \longleftrightarrow img(B)$$
$$x \longmapsto Sx$$

mit Umkehrabb.

$$S^{-1} : Img(B) \to img(A)$$

$\Rightarrow SR(A) = img(A) \cong Img(B) = SR(B)$

$\Rightarrow$ 1)

zu 2) Wir transponieren (*)

$$B^T = (T^{-1})^T A^T S^T$$

$\Rightarrow B^T$ und A^T sind äquivalent

~~SB~~

$SR(B^T) = ZR(B)$ und $SR(A^T) = ZR(A)$

$\Rightarrow$ 2) folgt aus 1)

Zeilenumformungen revisited

P_{ij} , $S_i(\lambda)$, $A_i^j(\lambda)$ $\in Mat(n\times n, \mathbb{R})$

$i,j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{überall, wo nix steht} \rightarrow 0}$

$$P_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \rightarrow \\ \\ j \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$
$$\qquad\qquad\qquad\quad \uparrow i \qquad \uparrow j$$

$$S_i(\lambda) = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 0$$
$$\qquad\qquad\qquad\quad i$$

$$A_i^j(\lambda) = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & \lambda & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Diese Matrizen heißen Elementarmatrizen

Fakt: Sei $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in Mat(n \times m, \mathbb{R})$

Dann gilt:

Zeilenumformungen:

1) $P_{ij} \cdot A \mathrel{\hat{=}}$ Vertauschen der Zeilen ~~Ap~~ a_i und a_j
2) $S_i(\lambda) \cdot A \mathrel{\hat{=}}$ Skalieren der Zeile a_i mit Faktor λ
3) $A_i^j(\lambda) \cdot A \mathrel{\hat{=}}$ Addieren von λa_j zur Zeile a_i

Bem: $A \in Mat(m \times n, \mathbb{R})$

$A \cdot P_{ij}$, $A \cdot S_i(\lambda)$, $A \cdot A_i^j(\lambda)$

Spaltenumformungen

Fakt: Alle Elementarmatrizen sind invertierbar.

$$(P_{ij})^{-1} = P_{ij}$$

$$\lambda \neq 0 \quad (S_i(\lambda))^{-1} = S_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$(A_i^j(\lambda))^{-1} = A_i^j(-\lambda)$$

Bem: $T \in GL(n, \mathbb{R})$

$Ax = b \Leftrightarrow TAx = Tb$

Satz 2.18. Jedes $A \in GL(n, \mathbb{R})$ lässt sich als (endliches) Produkt von Elementarmatrizen schreiben.

Beweis:

v.w.: Sei $A \in Mat(n \times m, \mathbb{R})$. A lässt sich durch Zeilenumformungen auf verfeinerte ZSF bringen (Blatt 5/1).

$\Rightarrow B_1 \ldots B_r \cdot A = \begin{pmatrix} \text{verf.} \\ \text{ZSF} \end{pmatrix}$ mit B_i Elementarmatrizen

Jetzt: $A \in$ ~~GL~~ $GL(n, \mathbb{R})$

A invertierbar $\Leftrightarrow$ rang(A) = dim(Bild(A)) = n

Sei B verfeinerte ZSF von A $\Rightarrow$ Rang $B = n$

$r\left\{\begin{pmatrix} 1 & \ldots \\ & \ldots \end{pmatrix}\right.$ mit $r = \dim(ZR(B)) = \dim(SR(B)) =$ rang $B = n$

B ist quadratisch, in verfeinerter ZSF und hat n Stufen. $\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = B_r^{-1} \cdots B_1^{-1}$ Produkt von Elementarmatrizen.

Berechnung von inversen Matrizen

(siehe oben: $A^{-1} = B_1 \ldots B_r$)

INPUT: $A \in GL(n, \mathbb{R})$ $\rightsquigarrow$ OUTPUT: A^{-1}

Methode:

1) Bilde $(A \mid \mathbb{1}_n) \in Mat(n \times 2n, \mathbb{R})$

2) GA (Gaußalgorithmus) damit

$\rightsquigarrow (\mathbb{1}_n \mid \underbrace{A^{-1}}_{= B_1 \ldots B_r})$

50

Bsp: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 7 & 1 & & 0 \\ 2 & 5 & 10 & & 1 & \\ 3 & 7 & 14 & 0 & & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 7 & 1 & & \\ 0 & -1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & -5 & 3 & 0 \\ & 1 & 4 & -2 & -1 & 0 \\ & & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & 0 & -7 & 5 \\ & 1 & & -2 & 7 & -4 \\ 0 & & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

3. Determinanten

Bsp: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Mat(2\times 2, \mathbb{R})$

Hat $Ax = b$ ein eindeutiges Lsg?

$\begin{pmatrix} Ax = b \text{ hat eindeutige} \\ \text{Lösung } \forall b \in \mathbb{R}^2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} A \text{ invertierbar} \end{pmatrix}$

$\Updownarrow$ Präsenzblatt $\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$

$\det(A) = ad - bc \neq 0 \qquad\qquad \ker A = \{0\}$

$\Updownarrow$

$\operatorname{rang}(A) = 2$

Beweis: oBdA $a \neq 0$

Gauß $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & b \\ ca & da \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \underbrace{da - bc}_{=\det(A)} \end{pmatrix}$

allgemein: Suchen Abb

$\det: Mat(n\times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit A invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$\Rightarrow$ $Ax = b$ hat eindeutige Lsg $\forall b \in \mathbb{R}^n$

(A) Permutationen

soll ein sigma sein

Def.: Eine bijektive Abb $\delta : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ heißt Permutation.

Die Menge aller Permutationen heißt symmetrische Gruppe

Schreibweise: S_n

Notation $\underset{\sigma}{\delta} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{bmatrix}$

Bsp: 1) $id = \begin{bmatrix} 1 & \dots & n \\ 1 & \dots & n \end{bmatrix}$

2) $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in S_3$
$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \notin S_3$ (da nicht injektiv

3) $\sigma, \tau \in S_n \qquad \sigma \circ \tau \in S_n$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Schreiben statt $\sigma \circ \tau = \sigma \cdot \tau = \sigma \tau$

4) $\sigma \in S_n \Rightarrow$ Umkehrabb. $\sigma^{-1} \in S_n$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

5) Zykel $\sigma = (a_1 \, a_2 \dots a_k)$, $a_i \in \{1, \dots, n\}$

a_i paarweise verschieden: $\Leftrightarrow a_i = a_j \Rightarrow i = j$

$$\sigma(a) = \begin{cases} a_{i+1} & , a = a_i \\ a_1 & , a = a_k \\ a & , \text{sonst} \end{cases}$$

$\sigma = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k & \text{restliche } a \\ a_2 & a_3 & \dots & a_k & a_1 & a \end{bmatrix}$

auf sich selbst

k = Länge des Zykels σ 52

$(2\ 4) \in S_5$

$(2\ 4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Länge 1 : $(a) = id$

Länge 2 : $(a_1 a_2)$

„Transpositionen" ; vertauschen a_i & a_j

$(1\,2\,3) = (2\,3\,1) = (3\,1\,2)$

$\left.\begin{array}{l} (1\,2)(2\,3) = (1\,2\,3) \\ \qquad\qquad\qquad \neq \\ (2\,3)(1\,2) = (1\,3\,2) \end{array}\right\} \Rightarrow$ nicht kommutativ