k = Länge des Zykels σ 52

$(2\ 4) \in S_5$

$(2\ 4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Länge 1: $(a) = id$

Länge 2: $(a_1 a_2)$

„Transpositionen" ; vertauschen a_i & a_j

$(1\,2\,3) = (2\,3\,1) = (3\,1\,2)$

$\left.\begin{array}{l}(1\,2)(2\,3) = (1\,2\,3) \\ \qquad\qquad\quad \neq \\ (2\,3)(1\,2) = (1\,3\,2)\end{array}\right\} \Rightarrow$ nicht kommutativ

27.11.2015

Bsp:

6) $S_1 = \{id\}$

$S_2 = \{id, (1\,2)\}$

$S_3 = \{id, (1\,2), (\cancel{1}\,2\,3), (1\,3), (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$

7) $\sigma = (a_1 \dots a_k)$

$\tau = (b_1 \dots b_l)$

σ und τ heißen disjunkt, falls $\{a_1, \dots, a_k\} \cap \{b_1, \dots, b_l\} = \emptyset$

Dann gilt: $\sigma \cdot \tau = \tau \cdot \sigma$

$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_1 & a_2 & \dots a_k & b_1 & \dots & b_l & \text{restliche Zahlen} \\ a_2 & a_3 & a_1 & b_2 & & b_1 & \text{bleiben fest} \end{array}\right]$

$\sigma = (12)$
$\tau = (34)$ $\quad \sigma\tau = \tau\sigma = (12)(34)$

M endliche Menge $\quad \#M = |M| =$ Anzahl der Elemente in M

<u>Satz 3.1</u> Sei $n \in \mathbb{N}$

a) $|S_n| = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$

b) Jedes $\sigma \in S_n$ lässt sich als Produkt von disjunkten Zykeln schreiben

c) Jedes $\sigma \in S_n$ lässt sich als Produkt von Transpositionen schreiben

Beweis:

a) Um σ zu bauen, legen wir der Reihe nach $\sigma(i)$ fest.

Wähle $\sigma(1) \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow n$ Möglichkeiten

Wähle $\sigma(2) \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{\sigma(1)\} \rightarrow n-1$ Möglichkeiten

.

$\sigma(n) \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{\sigma(1) \ldots \sigma(n-1)\} \rightarrow 1$ Möglichkeit

$\Rightarrow n!$ Möglichkeiten

$\Rightarrow |S_n| = n!$

b)

Bsp: $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in S_6$

Wir folgen den Elementen: $1 \mapsto 4 \mapsto 6 \mapsto 1$

$2 \mapsto 2$

$3 \mapsto 5 \mapsto 3$

$\Rightarrow \sigma = (146)(2)(35) = (146)(35)$

b) wähle $i \in \{1, \dots, n\}$

$i \mapsto \sigma(i) \mapsto \sigma^2(i)$

Da $\{1, \dots, n\}$ endlich, gilt

$$\sigma^k(i) = \sigma^l(i) \text{ für } k \neq l$$

$$\sigma^k(i) = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma(i)}_{k\text{-mal}}$$

$$\sigma^3(i) = \sigma(\sigma(\sigma(i)))$$

oBdA $k > l$

$\Rightarrow \sigma^{k-l}(i) = i$

Wähle k minimal mit $\sigma^k(i) = i$

$\tau = (i\ \sigma(i),\ \sigma^{(k-1)}(i))$

Jetzt weiterrechnen mit $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, \sigma(i), \sigma^{k-1}(i)\}$

$\leadsto$ Zykel τ_2 . . .

Verfahren terminiert $\longrightarrow \sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_m$

c) es reicht, Aussage für Zykel zu zeigen

$(a_1 \dots a_k) =$

$= (a_1 a_2)(a_2 a_3) \dots (a_{k-1} a_k)$

Def: sei $\sigma \in S_n$.

Ein Paar (i,j) heißt Fehlstand von σ, falls gilt

$$i < j$$

$$\text{und } \sigma(i) > \sigma(j)$$

$F(\sigma) :=$ Anzahl der Fehlstände von σ

Bsp: $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

i,j	1,2	1,3	2,3
$\sigma(i),\sigma(j)$	1,3	1,2	3,2
Fehlstand:	nein	nein	ja

anderes Bsp:

Transposition $\sigma = (i\,j)$, $i<j$

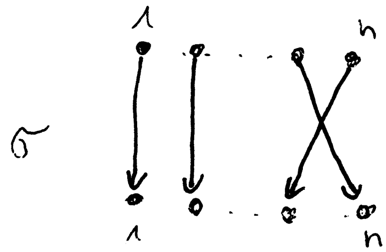
$$= \begin{bmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{bmatrix}$$

Fehlstände

- $(i\,j)$
- (i,x) , $i<x<j$
- (x,j) , $i<x<j$

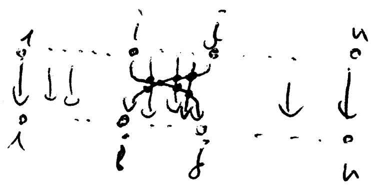
$$\Rightarrow F(\sigma) = 2(j-i-1)+1$$

Anschauung:
Pfeildiagramm



(kein FS) FS (Fehlstand)

Bsp $(i\,j)$



$$\Rightarrow 2(j-i-1)+1$$

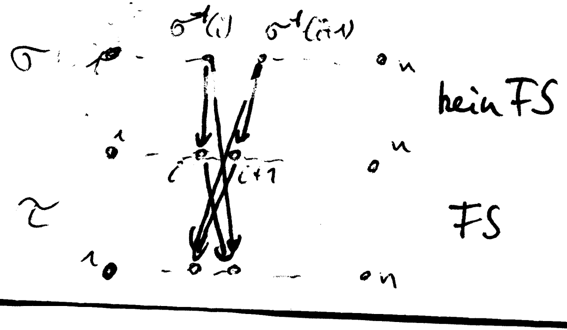
Def: Eine Permutation $\sigma \in S_n$ heißt gerade (bzw ungerade), falls $F(\sigma)$ gerade (ungerade) ist

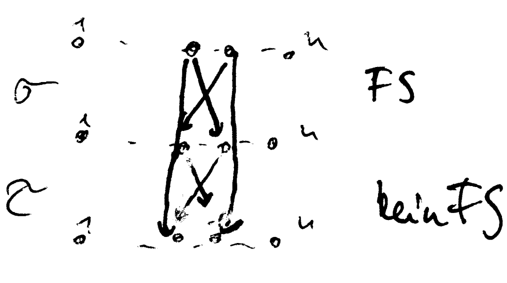
Signum $\quad \mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{F(\sigma)} = \begin{cases} +1 & \sigma \text{ gerade} \\ -1 & \sigma \text{ ungerade} \end{cases}$

Bsp: $\mathrm{sgn}((i,j)) = -1$

Lemma 3.2: Sei $\sigma \in S_n$ und τ Transposition.
Dann gilt: $\mathrm{sgn}(\tau \circ \sigma) = -\mathrm{sgn}(\sigma)$

Beweis: 1. Spezialfall: $\tau = (i\;i{+}1)$ Nachbartrans.





$\Rightarrow \tau\sigma$ und σ haben die gleichen Fehlstände außer dem Paar P gebildet aus $\sigma^{-1}(\{i, i+1\})$ P ist Fehlstand genau in entweder σ oder $\tau\sigma$.

$$F(\tau\sigma) = F(\sigma) \pm 1 \implies \text{Behauptung}$$

2. jetzt allgemein: $\tau = (i\,j)$, $i<j$

Es gilt:
$$\tau = \underrightarrow{(i\ \ i+1)(i+2\ \ i+3) \dots (j-1\ \ j)}\ \underleftarrow{(j-2\ \ j-1) \dots (i\ \ i+1)}$$

Produkt besteht aus $\underbrace{2(j-i-1)+1}_{\text{ungerade}}$ Faktoren

$$\operatorname{sgn}(\tau\sigma) \underset{1.\text{ Fall}}{=} (-1)^{2(j-i-1)+1} \cdot \operatorname{sgn}(\sigma) = -\operatorname{sgn}(\sigma)$$

Lemma 3.3 $\sigma \in S_n$. Dann sind äquivalent

a) σ ist gerade / ungerade

b) Jede Darstellung von σ als Produkt von Transpositionen besteht aus einer geraden / ungeraden Anzahl von Faktoren.

c) Es existiert eine Darstellung von σ als Produkt einer geraden / ungeraden Anzahl von Transpositionen.

Beweis:

a) $\Rightarrow$ b) $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$, τ_i Transpos.

$$1 = \operatorname{sgn}(\sigma) \underset{3.2.}{=} (-1)^k \cdot \underbrace{\operatorname{sgn}(id)}_{=1} = (-1)^k$$

$\Rightarrow k$ gerade

b) $\Rightarrow$ c) Existenz folgt aus 3.1 c)

c) $\Rightarrow$ a) wie oben

Satz 3.4 $\sigma, \pi \in S_n$

Dann gilt: $\operatorname{sgn}(\sigma\pi) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\pi)$

~~[illegible]~~

Beweis:

Schreibe σ als Produkt von k Transp.

" π " " " l "

$\Rightarrow \sigma\pi$ Produkt von $k+l$ Transp.

$\operatorname{sgn}(\sigma\pi) = (-1)^{k+l} = (-1)^k \cdot (-1)^l = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\pi)$

Notation: $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sgn}(\sigma) = +1\}$ # Menge aller geraden Trans

alternierende Gruppe

Satz 3.4 ... $\sigma, \pi \in A_n \Rightarrow \sigma\pi \in A_n$

Korollar 3.5: jede Transposition τ liefert ein Bijektion

$\underset{\text{alle Perm mit sgn +}}{A_n} \longrightarrow S_n \setminus A_n$ ← alle Permut. mit $\sigma - 1$

$\sigma \mapsto \tau\sigma$

$\tau\sigma \mapsfrom \sigma$

$\Rightarrow S_n = A_n \,\dot{\cup}\, \tau A_n$

$\tau A_n = \{\tau\sigma \mid \sigma \in A_n\}$

Mengen: $A, B \subset M$ disjunkte Vereinigung

$M = A \,\dot{\cup}\, B$

$:\Leftrightarrow M = A \cup B$

$A \cap B = \emptyset$

insbesondere folgt:

$|A_n| = \frac{|S_n|}{2} = \frac{n!}{2}$

3 Determinante (nach Leibniz)

Def: Sei $A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$

Wir definieren die <u>Determinante</u> von A als

$$\det(A) := \sum sgn(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \in \mathbb{R}$$

<u>Bsp</u>: $n=2$, $S_2 = \{ \underset{sgn\,+}{id}, \underset{sgn\,-}{(12)} \}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \qquad \det A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$n = 3$ $\quad S_3 = \{ id, (12), (13), (23), (123), (132) \}$

$$\begin{array}{lcccccc} & id & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ sgn & + & - & - & - & + & + \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \overset{id}{a_{11} a_{23} a_{33}} + \overset{(123)}{a_{12} a_{23} a_{31}} + \overset{(132)}{a_{13} a_{32} a_{21}}$$
$$- \overset{(13)}{a_{13} a_{22} a_{31}} - \overset{(23)}{a_{11} a_{23} a_{32}} - \overset{(12)}{a_{12} a_{21} a_{33}}$$

Eselsbrücke:

$$\begin{array}{ccc|cc} id & (123) & (132) & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ (13) & (23) & (12)\,+ & + & + \end{array}$$

27.11.15

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$$

$= (1\,2\,3)$

$(1\,2\,3)^{-1} = (3\,2\,1) = (2\,1\,3) = (1\,3\,2)$

Bsp.: 6) $S_1 = \{ id \}$

$S_2 = \{ id, (1,2) \}$

$S_3 = \{ id, (1\,2), (2\,3), (1\,3), (1\,2\,3), (1\,3\,2) \}$

7) $\sigma = (a_1 \dots a_k)$

$\tau = (b_1 \dots b_\ell)$

σ und τ heißen disjunkt, falls $\{a_1, \dots, a_k\} \cap \{b_1, \dots, b_\ell\} = \emptyset$

Dann gilt: $\sigma \cdot \tau = \tau \cdot \sigma$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k & b_1 & \dots & b_\ell & \text{restliche Zahlen} \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 & b_2 & & b_1 & \text{bleiben fest} \end{bmatrix}$$

$\sigma = (1\,2)$

$\tau = (3\,4)$

$\sigma \cdot \tau = \tau \cdot \sigma = (1\,2)(3\,4)$

M endliche Menge

$\# M = |M|$ = Anzahl der Elemente in M

<u>Satz 3.1</u>

Sei $n \in \mathbb{N}$

a) $|S_n| = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$

b) Jedes $\sigma \in S_n$ lässt sich als Produkt von disjunkten Zykeln schreiben.

c) Jedes $\sigma \in S_n$ lässt sich als Produkt von Transpositionen schreiben

Beweis:

a) Um σ zu bauen, legen wir der Reihe nach $\sigma(i)$ fest. Wähle $\sigma(1) \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow n$ Möglichkeiten

Wähle $\sigma(2) \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\sigma(1)\} \Rightarrow n-1$ Möglichkeiten

$\vdots$

$\sigma(n) \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\sigma(1) \dots \sigma(n-1)\} \Rightarrow 1$ Möglichkeit

$\Rightarrow n!$ Möglichkeiten

$\Rightarrow |S_n| = n!$

b) Bsp.: $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in S_6$

Wir folgen den Elementen:

$$1 \mapsto 4 \mapsto 6 \mapsto 1$$

$$2 \mapsto 2$$

$$3 \mapsto 5 \mapsto 3$$

$$\sigma = (1\ 4\ 6)(2)(3\ 5)$$
$$= (1\ 4\ 6)(3\ 5)$$

Wähle $i \in \{1, \dots, n\}$

$i \mapsto \sigma(i) \mapsto \sigma^2(i) \dots$

Da $\{1, \dots, n\}$ endlich ist, gilt $\sigma^k(i) = \sigma^l(i)$ für $k \neq l$

OBdA $k > l$

$\Rightarrow \sigma^{k-l}(i) = i$

Wähle k minimal mit $\sigma^k(i) = i$

$\tau_1 = (i\ \sigma(i) \dots \sigma^{k-1}(i))$

Jetzt weitermachen mit $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{k-1}(i)\}$

$\rightsquigarrow$ Zykel τ_2

Verfahren terminiert $\Rightarrow \sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_m$

c) es reicht Aussage für Zykel zu zeigen.

$(a_1 \dots a_k) = \cancel{(a_1 a_2)(a_2 a_3) \dots (a_{k-1} a_k)}$

$(a_1 \dots a_k) = (a_1 a_2)(a_2 a_3) \dots (a_{k-1} a_k)$

<u>Def.</u>: Sei $\sigma \in S_n$.

Ein Paar (i,j) heißt Fehlstand von σ falls gilt

$i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$

$F(\sigma) :=$ Anzahl der Fehlstände von σ

Bsp.: $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

i,j	$1,2$	$1,3$	$2,3$
$\sigma(i), \sigma(j)$	$1,3$	$1,2$	$3,2$
FS	Nein	Nein	Ja

$\sigma = (ij), \quad i < j$

$= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{bmatrix}$

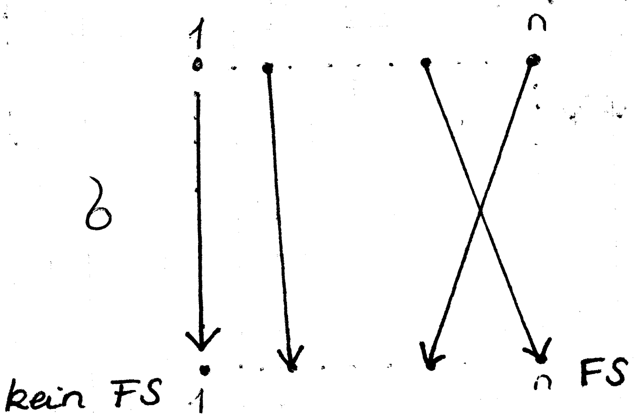
<u>Fehlstände</u>

- (i,j)
- $(i,x),\ i < x < j$
- $(x,j),\ i < x < j$

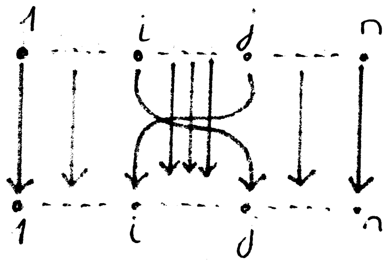
$\Rightarrow F(\sigma) = 2(j-i-1)+1$

<u>Anschauung</u>

Pfeildiagramm



Bsp. (ij)



$\Rightarrow 2(j-i-1)+1$

Def.: Eine Permutation heißt gerade (bzw. ungerade) falls $F(\sigma)$ gerade (bzw. ungerade) ist.

Signum: $sgn(\sigma) = (-1)^{F(\sigma)} = \begin{cases} +1 & \sigma \text{ gerade} \\ -1 & \sigma \text{ ungerade} \end{cases}$

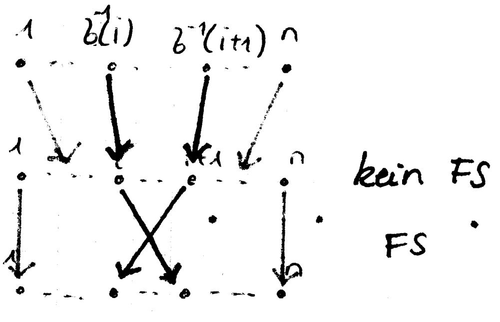
Bsp.: $sgn((ij)) = -1$

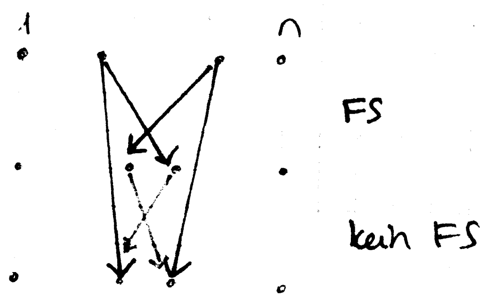
Lema 3.2

Sei $\sigma \in S_n$ und τ Transposition. Dann gilt: $sgn(\tau\sigma) = -sgn(\sigma)$

Beweis:

1. Spezialfall: $\tau = (i\ i+1)$ Nachbartransposition.





$\Rightarrow$ $\tau\sigma$ und σ haben die gleichen Fehlstände außer dem Paar P gebildet aus $\sigma^{-1}(\{i, i+1\})$

P ist Fehlstand genau in entweder σ oder $\tau\sigma$

$F(\tau\sigma) = F(\sigma) \pm 1 \Rightarrow$ Beh.

2. Jetzt allgemein: $\tau = (i\ j)$, $i < j$

Es gilt:

$$\tau = (i\ \ i+1)(i+2\ \ i+3)\cdots(j-1\ \ j)(j-2\ \ j-1)\cdots(i\ \ i+1)$$

Produkt besteht aus $\underbrace{2(j-i-1)+1}_{\text{ungerade}}$ Faktoren

$$\operatorname{sgn}(\tau\sigma) \underset{\text{1. Fall}}{=} (-1)^{2(j-i-1)+1} \cdot \operatorname{sgn}(\sigma) = -\operatorname{sgn}(\sigma)$$

Lema 3.3

$\sigma \in S_n$. Dann sind äquivalent:

a) σ ist gerade / ungerade

b) jede Darstellung von σ als Produkt von Transpositionen besteht aus einer geraden / ungeraden Anzahl v. Faktoren

c) Es existiert eine Darstellung von σ als Produkt einer geraden / ungeraden Anzahl von Transpositionen.

Beweis:

a) $\Rightarrow$ b) $\quad \sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$, τ_i Transp.

$$1 = \operatorname{sgn}(\sigma) \underset{3.2}{=} (-1)^k \cdot \underbrace{\operatorname{sgn}(id)}_{=1} = (-1)^k$$

$\Leftrightarrow$ k gerade

b) $\Rightarrow$ c) $\quad$ Existenz folgt aus 3.1.c)

c) $\Rightarrow$ a) $\quad$ wie oben

Satz 3.4.

$\sigma, \pi \in S_n$. Dann gilt: $\operatorname{sgn}(\sigma\pi) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\pi)$

Beweis: Schreibe σ als Produkt k Transp.

" π —"— l "

$\Rightarrow \sigma\pi$ Produkt von $k+l$ Transp.

$sgn(\sigma\pi) = (-1)^{k+l} = (-1)^k \cdot (-1)^l = sgn(\sigma)\, sgn(\pi)$

Notation

$A_n = \{ \sigma \in S_n \mid sgn(\sigma) = +1 \}$ alternierende Gruppe

Satz 3.4. $\sigma, \pi \in A_n \Rightarrow \sigma\pi \in A_n$

Korollar 3.5

Jede Transposition τ liefert eine Bijektion $\overset{sgn\,+}{A_n} \to \overset{sgn\,-}{S_n \setminus A_n}$

$\sigma \mapsto \tau \cdot \sigma$

$\tau \cdot \sigma \leftarrow\!\shortmid\; \sigma$

$\Rightarrow S_n = A_n \,\dot\cup\, \tau A_n = \{ \tau\sigma \mid \sigma \in A_n \}$

(*)

Mengen: $A, B \subset M$

disjunkte Vereinigung

$M = A \,\dot\cup\, B$

$:\Leftrightarrow \quad M = A \cup B$

$A \cap B = \emptyset$

(*) insbesondere folgt: $|A_n| = \frac{|S_n|}{2} = \frac{n!}{2}$

(B) Determinante (nach Leibniz):

Def: Sei $A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$

Wir definieren die Determinante von A als:

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \in \mathbb{R}$$

Bsp: $n=2$, $S_2 = \{ id, (12) \}$

$\quad\;$ sgn $\quad + \qquad -$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \det A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$n = 3 \qquad S_3 = \{ id, (12), (13), (23), (123), (132) \}$

$\qquad\quad$ sgn $\quad + \quad - \quad - \quad - \quad + \quad +$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \overset{id}{a_{11} a_{23} a_{33}} + \overset{(123)}{a_{12} a_{23} a_{31}} + \overset{(132)}{a_{13} a_{32} a_{21}} - \overset{(13)}{a_{13} a_{22} a_{31}}$$

$$- \overset{(23)}{a_{11} a_{23} a_{32}} - \overset{(12)}{a_{12} a_{21} a_{33}}$$

Eselsbrücke:

$$\begin{array}{ccc|cc} id & (123) & (132) & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ (13) & (23) & (12) & & \\ & & + & + & + \end{array}$$