01.12.15

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$$

Bsp.:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -2 + 12 + 0 - 0 - 9 = 1$$

$\det(A)$ hat $|S_n| = n!$ viele Summanden

$n = 4$: $\quad 4! = 24$ Summanden

$n = 60$: $\quad 60! = 10^{82}$

Lema 3.6.

a) $\det : \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ist linear in den Zeilen von A, d.h.

1)
$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + b_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

2)
$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

b) vertauschen von zwei Zeilen ändert das Vorzeichen

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_l \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_l \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Beweis:

a) einzelner Summand

$$a_{1\sigma(1)} \cdots (a_{i\sigma(i)} + b_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} + a_{1\sigma(1)} \cdots b_{i\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$a_{1\sigma(1)} \cdots (\lambda a_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} = \lambda \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

$\Rightarrow$ einzelne Summanden sind linear (bzgl. Zeile i)

$\Rightarrow$ det(A) ist linear (in Zeile i)

b)

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ a_l \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_{ij}) \qquad B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_l \\ a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (b_{ij})$$

$a_{ij} = b_{\tau(i)j}$ bzw. $b_{ij} = a_{\tau(i)j}$

mit $\tau = (k\,l)$

Benutzen 3.5. $\quad S_n = \overset{sgn +}{A_n} \,\dot\cup\, \overset{sgn -}{\tau A_n}$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in A_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} - \sum_{\sigma \in A_n} a_{1\tau\sigma(1)} \cdots a_{n\tau\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in A_n} a_{\tau(1)\tau\sigma(1)} \cdots a_{\tau(n)\tau\sigma(n)} - \sum_{\sigma \in A_n} a_{\tau(1)\sigma(1)} \cdots a_{\tau(n)\sigma(n)}$$

Reihenfolge der Faktoren mit τ vertauscht und $\tau^2 = id$

$$= \sum_{\sigma \in A_n} b_{1\tau\sigma(1)} \cdots b_{n\tau\sigma(n)} - \sum_{\sigma \in A_n} b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

$$= -\left(\sum b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)} - \sum b_{1\tau\sigma(1)} \cdots b_{n\tau\sigma(n)}\right)$$

$$= -\det B$$

<u>Bem.</u>: Sind zwei Zeilen von A identisch, so gilt $\det(A) = 0$, denn:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_k \\ \vdots \\ a_k \\ a_n \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = -\det(A) \Rightarrow \det(A) = 0$$

Lema 3.7

$A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$

$\det(A) = \det(A^T)$

Transponierte

Beweis:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \overset{\text{Umordnen der Faktoren}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)\, a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

$\sigma^{-1} = \pi$

$sgn(\pi) = sgn(\sigma)$

$$= \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi)\, a_{\pi(1)1} \cdots a_{\pi(n)n} = \sum sgn(\pi)\, a^t_{1\pi(1)} \cdots a^t_{n\pi(n)}$$

$$= \det(A^t)$$

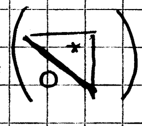
Lema 3.8 $A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$

a) Zeilenumformungen ändern $\det(A)$ wie folgt:

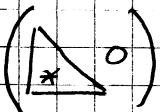
1) Vertauschen: $\det(P_{ij} \cdot A) = -\det(A)$

2) Skalieren: $\det(S_i(\lambda) \cdot A) = \lambda \cdot \det(A)$

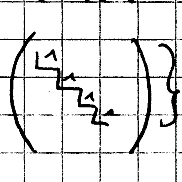
3) Addieren: $\det(A_i^j(\lambda) \cdot A) = \det(A)$

b) Sei $A =$  in oberer Dreiecksgestalt (also $a_{ij} = 0 \ \forall\, i > j$)

Dann gilt: $\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$ Diagonale

Bem.: 1) b) gilt ebenso für untere Dreiecksgestalt $A =$ 

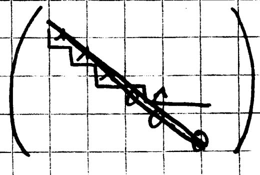
2) Können also $\det(A)$ durch Gauß-Algorithmus und Mitnotieren der Minuse, λ berechnen.

$A \xrightarrow{GA} C =$  $\}\, r$

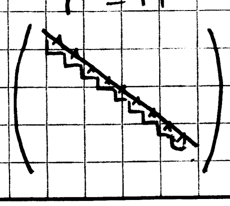
C ist in oberer Dreiecksgestalt

$$\Rightarrow \det(C) = \begin{cases} 0 & r < n \\ 1 & r = n \end{cases}$$

$r < n$



$r = n$



Angenommen, im GA kommen l Vertauschungen und k Skalierungen mit Skalierungsfaktoren $\lambda_1, \dots, \lambda_k$

$$\Rightarrow \det(A) = (-1)^l \frac{1}{\lambda_1} \cdots \frac{1}{\lambda_k} \det(C)$$

Satz 3.9

$A, B \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$

a) A invertierbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

b) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Beweis:

a) $A \overset{GA}{\rightsquigarrow} C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{smallmatrix}\right) \}r$

Wir wissen $\operatorname{rang}(A) = r$

Mit der Bemerkung folgt: A invertierbar $\Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) = n$

$\Leftrightarrow \det(C) = 1$

$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

b) 1. Fall: $\det(A) = 0$

$\overset{a)}{\Rightarrow} A$ nicht inv. $\Rightarrow Im(A) \subsetneq \mathbb{R}^n$

Jetzt gilt: $Im(AB) \subseteq Im(A)$

denn:
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "B"] \arrow[rr, bend right, "A \cdot B"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow Im(A \cdot B) \subsetneq \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow A \cdot B$ nicht invert

$\overset{a)}{\Rightarrow} \det(AB) = 0$

2. Fall $\det(A) \neq 0$

$\Rightarrow A$ invertierbar

$\overset{2.18}{\Rightarrow} A$ lässt sich als Produkt von Elementarmatrizen schreiben:

$A = B_1 \dots B_k$

Es reicht also, Beh. für A Elementarmatrix zu zeigen.

$$\left(\begin{array}{l}\text{denn dann } \det(A) = \det(B_1) \ldots \det(B_k) \\ \qquad\qquad \det(AB) = \det(B_1) \ldots \det(B_k) \cdot \det(B)\end{array}\right)$$

3. Schritt: A Elementarmatrix

$$\tau = (ij)$$

$$\det(P_{ij}) = \det \begin{array}{cc} & \begin{matrix} \quad i & j \quad \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} = a_{11} \, a_{ij} \, a_{ji} \ldots a_{nn} \, sgn(\tau) = -1$$

$$\det(S_i(\lambda)) = \det \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = \lambda$$

$$\det(A_i^j(\lambda)) = \begin{pmatrix} 1 & & \lambda \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = 1$$ hat entweder obere oder untere Dreiecksgestalt

passt zu 3.8 a)

∎

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \overset{-1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

⊛

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = -\frac{1}{1}(-1) = 1$$

$$l = 0, \ \lambda_1 = -1$$

⊛ $\}-$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad l = 1, \ \lambda_1 = -1$$

$$\Rightarrow \det(A) = (-1)(-1) \cdot 1 = 1$$

Matrizen schreiben: $A = B_1 \cdots B_k$

Es reicht also, Beh. für A Elementarmatrix zu zeigen.

(denn dann: $\det(A) = \det(B_1) \cdots \det(B_k)$
$\det(AB) = \det(B_1) \cdots \det(B_k) \cdot \det(B)$)

3. Schritt

A elementarmatrix

$$\det(P_{ij}) = \det \begin{array}{c} \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ i \\ j \end{array} \overset{\tau(i\,j)}{=} a_{11} \cdots a_{ij} \cdots a_{ji} \cdots a_{nn} \operatorname{sgn}(\tau)$$

$$= -1$$

$$\det(S_i(\lambda)) = \det \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \lambda & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \lambda$$

$$\det(A_i^j(\lambda)) = \begin{pmatrix} 1 & & \lambda \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = 1$$

hat entweder obere, oder untere

Dreiecksgestalt

passt zu 3.8 a)

Bsp

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A) = \frac{1}{-1}(-1) = 1$$

Angenommen, im GA kommen l Vertauschungen und k Skalierungen mit Skalierungsfaktoren $\lambda_1, \dots, \lambda_k$

$$\overset{3.8a)}{\Longrightarrow} \det(A) = (-1)^l \frac{1}{\lambda_1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\lambda_k} \cdot \det(C)$$

Satz 3.9

$A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$

a) ~~Matrizen~~ A invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

b) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Beweis:

a) $A \overset{GA}{\rightsquigarrow} C = \begin{pmatrix} E_r & \\ & \end{pmatrix} \}r$

Wir wissen: $\mathrm{rang}(A) = r$

Mit der Bemerkung folgt: A invertierbar $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(A) = n$

$\Leftrightarrow \det(C) = 1$

$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

b) 1. Fall: $\det(A) = 0$

$\overset{a)}{\Longrightarrow} A$ nicht invertierbar $\Rightarrow \mathrm{img}(A) \subsetneq \mathbb{R}^n$

Jetzt gilt: $\mathrm{img}(A \cdot B) \subseteq \mathrm{img}(A)$

denn: $\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "B"] \arrow[rr, bend right, "A \cdot B"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$

$\Rightarrow \mathrm{img}(AB) \subsetneq \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow A \cdot B$ nicht invertierbar

$\overset{a)}{\Longrightarrow} \det(AB) = 0$

2. Fall: $\det A \neq 0$

$\Rightarrow A$ invertierbar

$\overset{2.18}{\Longrightarrow} A$ lässt sich als Produkt von Elementar=

Beweis:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

umordnen der Faktoren $= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$

$\sigma^{-1} = \pi$, $\operatorname{sgn}(\pi) = \operatorname{sgn}(\sigma)$: $= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{\pi(1)1} \cdots a_{\pi(n)n}$

$$= \sum \operatorname{sgn}(\pi)\, a^T_{1\pi(1)} \cdots a^T_{n\pi(n)}$$

$$= \det(A^T)$$

Lemma 3.8

$A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$

a) Zeilenumformungen ändern $\det(A)$, wie folgt:

1) Vertauschen: $\det(P_{ij} \cdot A) = -\det(A)$
   Elementarmatrix, die 2 Zeilen vertauscht
2) Skalieren: $\det(S_i(\lambda) \cdot A) = \lambda \det(A)$
3) Addieren: $\det(A_{ij}(\lambda) \cdot A) = \det(A)$

b) Sei $A = \begin{pmatrix} \ddots & * \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$ in oberer Dreiecksgestalt (Also $a_{ij} = 0 \ \forall\, i > j$)

Dann gilt $\det A = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ Diagonale

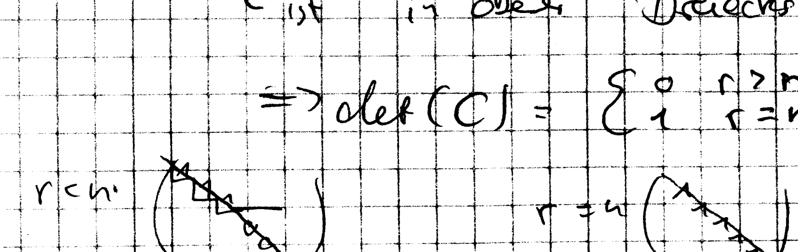
Bem: 1) b) gilt ebenso für untere Dreiecksgestalt

2) Können also $\det(A)$ durch Gauß-Algorithmus und Mitnotieren der Minusse, λ berechnen

$$A \xrightarrow{GA} C = \left(\ddots \right) \}\, r$$

C ist in oberer Dreiecksgestalt

$$\Rightarrow \det(C) = \begin{cases} 0 & r < n \\ 1 & r = n \end{cases}$$



b) $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ a_l \\ a_n \end{pmatrix} = (a_{ij})$ $\quad B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_l \\ a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (b_{ij})$

$a_{ij} = b_{\tau(i)j}$ bzw. $b_{ij} = a_{\tau(i)j}$

mit $\tau = (kl)$

Benutzen 3.5 $\quad S_n = \overset{\text{sgn}^+}{A_n} \dot{\cup} \overset{\text{sgn}^-}{\tau A_n}$

$$\det A = \sum_{\sigma \in A_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} - \sum_{\sigma \in A_n} a_{1\tau\sigma(1)} \cdots a_{n\tau\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in A_n} a_{\tau(1)\tau\sigma(1)} \cdots a_{\tau(n)\tau\sigma(n)}$$

$$- \sum_{\sigma \in A_n} a_{\tau(1)\sigma(1)} \cdots a_{\tau(n)\sigma(n)}$$

Reihenfolge der Faktoren mit τ vertauscht und $\tau^2 = id$.

$$= \sum_{\sigma \in A_n} b_{1\tau\sigma(1)} \cdots b_{n\tau\sigma(n)} - \sum_{\sigma \in A_n} b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

$$= -\left(\sum b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)} - \sum b_{1\tau\sigma(1)} \cdots b_{n\tau\sigma(n)} \right)$$

Bem: Sind zwei Zeilen von A identisch, so gilt $\det(A) = 0$

<u>Lemma 3.7</u>

$A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$

$\det(A) = \det(A^T)$

A^T: Transponierte

01.12.2015

Lemma 3.6

a) $\det: \mathrm{Mat}(n\times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

ist linear in den Zeilen von A ist, d.h

1) $\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + b_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

2) $\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

b) Vertauschen von zwei Zeilen ändert das Vorzeichen.

$\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_l \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} \vdots \\ a_l \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix}$

Beweis:

a) einzelner Summand

$$a_{1\sigma(1)} \cdots (a_{i\sigma(i)} + b_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} + a_{1\sigma(1)} \cdots b_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$a_{1\sigma(1)} \cdots (\lambda a_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \lambda \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$\Rightarrow$ einzelne Summanden sind linear (bzgl. Zeile i)

$\Rightarrow$ $\det(A)$ ist linear (in Zeile i)

B Determinante (nach Leibniz)

Def: Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$

Wir definieren die <u>Determinante</u> von A als

$$\det(A) := \sum \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \in \mathbb{R}$$

<u>Bsp</u>: $n=2$, $S_2 = \{\underset{\operatorname{sgn} +}{id}, \underset{\operatorname{sgn} -}{(12)}\}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \qquad \det A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$n=3$ $\quad S_3 = \{id, (12), (13), (23), (123), (321)\}$

sgn $\quad + \quad - \quad - \quad - \quad + \quad +$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \overset{id}{a_{11} a_{23} a_{33}} + \overset{(123)}{a_{12} a_{23} a_{31}} + \overset{(132)}{a_{13} a_{32} a_{21}}$$
$$\overset{(13)}{-\, a_{13} a_{22} a_{31}} - \overset{(23)}{a_{11} a_{23} a_{32}} - \overset{(12)}{a_{12} a_{21} a_{33}}$$

Eselsbrücke:

$$\begin{array}{ccc|cc} id & (123) & (132) & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ (13) & (23) & (12)+ & + & + \end{array}$$