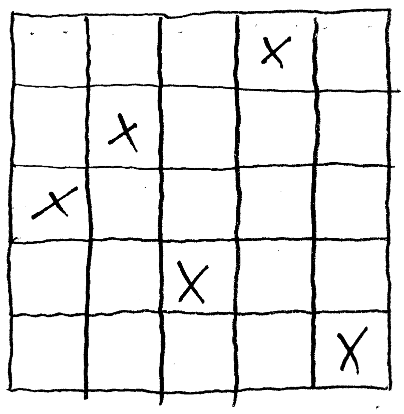
04.12.2015

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon \prod a_{i\sigma(i)}$$

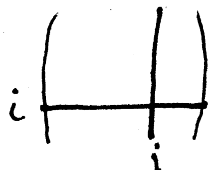


außerdem: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

$\det(A) \neq 0 \iff A$ invert.

Ⓒ Der Laplace'sche Entwicklungssatz

$A = (a_{ij}) \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$

$A_{ij} =$  $\in Mat((n-1) \times (n-1), \mathbb{R})$

<u>Streichungsmatrix</u> i-te Zeile und j-te Spalte streichen

Bsp: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{3} \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad A_{22} = \begin{matrix} & -1 \\ 0 & 3 \end{matrix}$

<u>Satz 3.10</u>

$A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$, $n \geq 2$

Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

nach Zeile i entwickeln

Für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

nach Spalte j entwickeln

Vorzeichen:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline + & - & + & - & + \\ \hline - & + & - & + & - \\ \hline + & - & + & - & + \\ \hline - & + & - & + & - \\ \hline + & - & + & - & + \\ \hline \end{array}$$

$\hat{=}$ Schachbrett

Bsp $\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 3} \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\underline{\underline{i=2}}$ $-0 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$= 0 + 1 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) = 1$

$j=3$ $\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & \boxed{3} \\ 2 & -3 & \boxed{2} \end{pmatrix} = +0 - 3 \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + 2 \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= 0 - 3(-1) + 2 \cdot (-1) = 1$

Beweis:

für Zeilen (Spalten: analog, oder durch Transponieren)

$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Betrachte $B_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ 0 \cdots 0\, 1\, 0 \cdots \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$

Durch $(i-1)$-maliges Vertauschen von Nachbarzeilen und $(j-1)$-maliges Vertauschen von Nachbarspalten erhalten wir

$B'_{ij} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \; 0 \; 0 \\ \hline * & A_{ij} \end{array}\right)$ Blockgestalt (Blatt 7, 4)

$\det B'_{ij} = \det(A_{ij})$

$$\det B_{ij}' = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \det B_{ij}'$$

→ jedes vertauschen liefert ein (-1)

$$= (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det(B_{ij})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \det \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{ij} \cdot e_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \sum_j a_{ij} e_j = a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det A$$

Def:

Komplementärmatrix

$$A^{\#} = (a_{ij}^{\#}) \qquad \text{mit} \qquad a_{ij}^{\#} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$$

Kor 3.11

$A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$

Dann gilt $A \cdot A^{\#} = A^{\#} \cdot A = \det(A) \cdot E_n = \begin{pmatrix} \det(A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det(A) \end{pmatrix}$

Beweis:

Eintrag (i,j) von $AA^{\#}$ $= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \underbrace{(-1)^{i+j} \det(A_{jk})}_{a^{\#}_{kj}}$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \det(B_{jk})$$

det linear in Zeile → $= \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ j-te Zeile $= \begin{cases} \det(A) & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

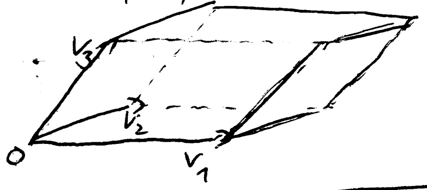
↳ denn a_i taucht zweimal auf

Folgerung: $\det(A) \neq 0$
$$\Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{\#}$$

(D) geometrische Bedeutung

$v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$

$Vol(v_1, \dots, v_n)$ = Volumen des Parallelepipeds $P(v_1, \dots, v_n)$



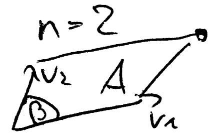
Es gilt: $$\boxed{|\det(v_1|\dots|v_n)| = Vol(v_1, \dots, v_n)}$$

Vorzeichen? $\rightsquigarrow$ Orientierung

$\det(v_1|\dots|v_n) > 0 \iff v_1, \dots, v_n$ und $e_1, \dots, e_n$ haben die selbe Orientierung

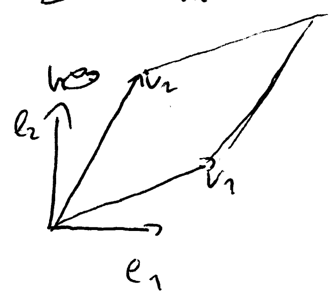
(können stetig ineinander überführt werden [ohne Sprünge, Spiegelungen])

Bsp: $n = 2$

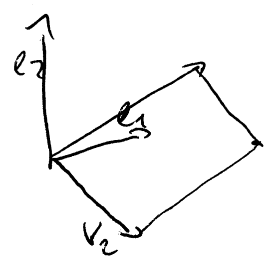


$|\det(v_1|v_2)| = A$

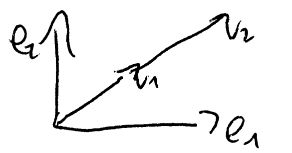
$$\left|\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}\right|$$



$\det(v_1|v_2) > 0$

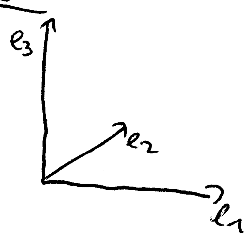


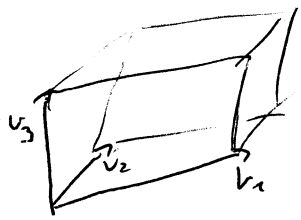
$\det(v_1|v_2) < 0$



$\det(v_1|v_2) = 0$

$n=3$





⋮

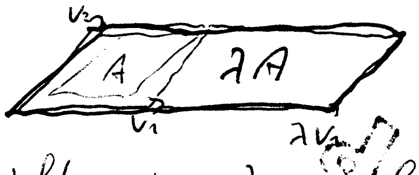
Zusammenfassung:

$\det(v_1|\dots|v_n)$ ist das Orientierte Volumen von $P(v_1, \dots, v_n)$

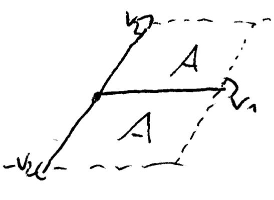
„Beweis" von $|\det(\dots)| = \mathrm{Vol}$

Vol verhält sich unter Zeilen- oder Spaltenumformungen wie $|\det|$ (vgl 3.8)

1. Vertauschen: $\mathrm{Vol}(\dots v_i \dots v_j \dots) = \mathrm{Vol}(\dots v_j \dots v_i \dots)$
2. Skalieren: $\mathrm{Vol}(\dots \lambda v_i \dots) \overset{\lambda>0}{=} \lambda \, \mathrm{Vol}(\dots v_i \dots)$

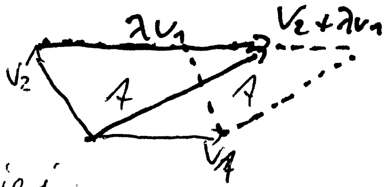


$\mathrm{Vol}(\dots -v_i \dots) = \mathrm{Vol}(\dots v_i \dots)$



$\Rightarrow \mathrm{Vol}(\dots \lambda v_i \dots) = |\lambda| \cdot \mathrm{Vol}(\dots v_i \dots)$

3. Addieren $\mathrm{Vol}(\dots v_i + \lambda v_j \dots)$



Prinzip von Cavalieri:
Scherung verändert Volumen nicht

$\Rightarrow$ Vol und $|\det|$ verhalten sich gleich

$$\det(v_1|\dots|v_n) \overset{GA}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$Vol(e_1, \dots e_n) = Vol(\text{Einheitswürfel}) = 1$

$\det(e_1|\dots|e_n) = 1$

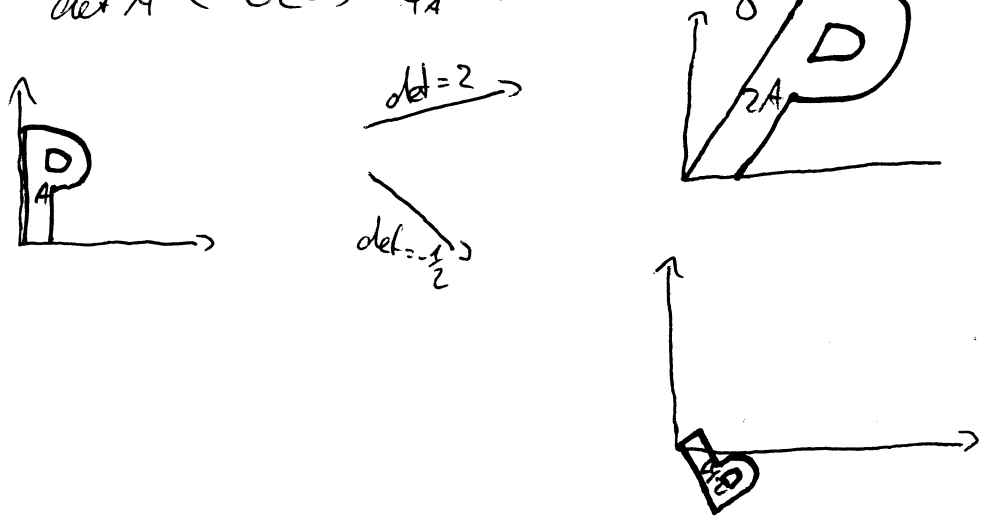
Folgerung:

$$\Phi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto Ax$$

$|\det(A)|$ = Skalierung der Volumenmessung unter Φ_A

$\det A > 0 \Leftrightarrow \Phi_A$ Orientierungstreu

$\det A < 0 \Leftrightarrow \Phi_A$ orientierungsumkehrend



4. Etwas mehr Algebra

	$(V,+)$ VR \ VR	$GL(n,\mathbb{R})$	S_n
Verknüpfung $M \times M \to M$	Vektoraddition $v+w$	Matrixmultiplikation $A \cdot B$	Verkettung von Abb $\sigma \circ \tau$
assoziativ	✓	✓	✓
neutrales Element	Nullvektor 0	Einheitsmatrix $\mathbb{1}$	Identität $id: i \mapsto i$
Inverse	reflektierter Vektor $-v = (-1) \cdot v$	Inverse Matrix A^{-1}	Umkehrabb. σ^{-1}

04.12.15

C. Der Laplace'sche Entwicklungssatz

$A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$

$A_{ij} = \in \mathrm{Mat}((n-1) \times (n-1), \mathbb{R})$

<u>Streichungsmatrix</u> i-te Zeile und j-te Spalte streichen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Satz 3.10.</u> $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$, $n \geq 2$

Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$ nach Zeile i entwickeln

Für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$ nach Spalte j entwickeln

Vorzeichen: Schachbrett

i \ j	1	2		...	n
1	+	−	+	−	+
2	−	+	−	+	−
⋮	+	−	+	−	+
n	−	+	−	+	−

Bsp.:

- $\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \overset{i=2}{=} -0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$= 0 + 1 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) = 1$

$j = 3$ • $\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = +0 - 3 \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= 0 - 3(-1) + 2(-1) = 1$

Beweis für Zeilen (Spalten analog oder durch Transponieren)

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Betrachte: $$B_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}\overset{\displaystyle j}{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ 0 \; 0 \; 1 \; 0 \; 0 \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$$

Durch $(i-1)$-maliges Vertauschen von Nachbarzeilen und $(j-1)$-maliges Vertauschen von Nachbarspalten erhalten wir

$$B_{ij}' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline * & A_{ij} \end{array}\right)$$ Blockgestalt

$$\det B_{ij}' = \det(A_{ij})$$

$$\det B_{ij} = (-1)^{\underbrace{(i-1)+(j-1)}_{\text{jedes Vertauschen liefert ein } (-1)}} \cdot \det B_{ij}' = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det(B_{ij})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{ij} e_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \sum a_{ij} e_j = a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det A$$

Def.: Komplementärmatrix

$$A^{\#} = (a_{ij}^{\#}) \quad \text{mit} \quad a_{ij}^{\#} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$$

Kor 3.11 $A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$

Dann gilt:

$$A \cdot A^{\#} = A^{\#} \cdot A = (\det A) \cdot E_n = \begin{pmatrix} \det(A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det(A) \end{pmatrix}$$

Beweis:

$$\underset{\text{von } A \cdot A^{\#}}{\text{Eintrag } (i,j)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot \overbrace{(-1)^{i+j} \det(A_{jk})}^{a_{kj}^{\#}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \det(B_{jk})$$

$$\underset{\text{in Zeile}}{\text{det linear}} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ a_n \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-te Zeile} = \begin{cases} \det(A) & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

↳ denn a_i taucht zweimal auf

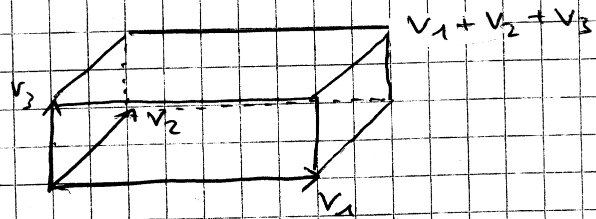
Folgerung: $\det(A) \neq 0$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{\#}$$

(J). geometrische Bedeutung

$v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$

$Vol(v_1, \dots, v_n)$ = Volumen des (*)



(*) Parallelepiped $P(v_1, \dots, v_n)$

Es gilt: $|\det(v_1 | \dots | v_n)| = Vol(v_1, \dots, v_n)$

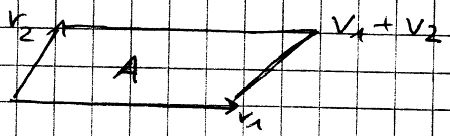
Vorzeichen? ⇝ Orientierung

$\det(v_1 | \dots | v_n) > 0$

$\Longleftrightarrow$ $v_1, \dots, v_n$ und $e_1, \dots, e_n$ haben dieselbe Orientierung.

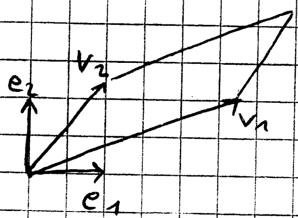
(können <u>stetig</u> ineinander überführt werden
[ohne Sprünge, Spiegelungen])

Bsp.: $n = 2$

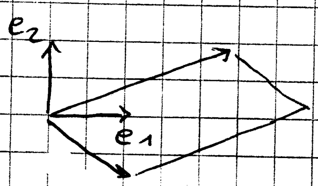


$|\det(v_1|v_2)| = A$

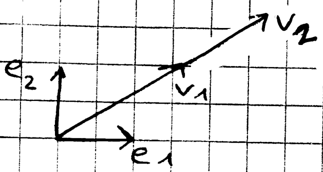
$$\left(\left| \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} \right| \right)$$



$\det(v_1|v_2) > 0$

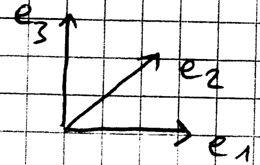


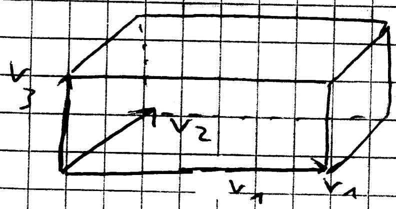
$\det(v_1|v_2) < 0$



$\det(v_1|v_2) = 0$

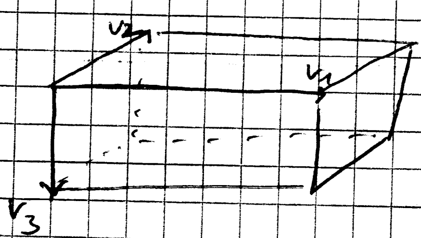
$n = 3$





$\det(v_1|v_2|v_3) > 0$

Rechte-Hand Regel



$\det(v_1|v_2|v_3) < 0$

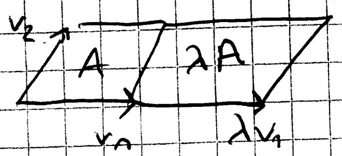
<u>Zusammenfassung</u>: $\det(v_1|\dots|v_n)$ ist das <u>orientierte</u> Volumen von $P(v_1, \dots, v_n)$

"Beweis" von $|\det(\ldots)| = \mathrm{Vol}$

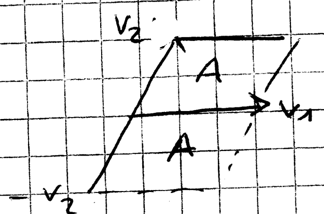
Vol. verhält sich unter Zeilen- oder Spaltenumformungen wie $|\det|$ (siehe 3.8)

1. Vertauschen: $\mathrm{Vol}(v_i \ldots v_j \ldots) = \mathrm{Vol}(v_j \ldots v_i \ldots)$
2. Skalieren $\lambda > 0$

$\mathrm{Vol}(\ldots \lambda v_i \ldots)$



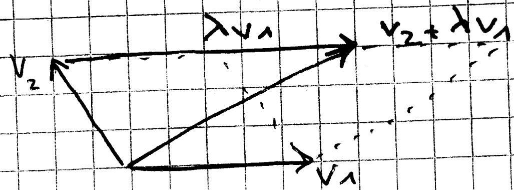
$\mathrm{Vol}(\ldots -v_i \ldots)$



$\Rightarrow \mathrm{Vol}(\ldots \lambda v_i \ldots) = |\lambda| \, \mathrm{Vol}(\ldots v_i \ldots)$

3. Addieren

$\mathrm{Vol}(\ldots v_i + \lambda v_j \ldots) = \mathrm{Vol}(\ldots v_i \ldots)$



<u>Prinzip von Cavalieri</u>

Scherung verändert Volumen nicht

$\Longrightarrow$ Vol und $|\det|$ verhalten sich gleich

$$\det(v_1|\ldots|v_n) \xrightarrow{GA} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Vol}(e_1 \ldots e_n) = \mathrm{Vol}(\text{Einheitswürfel}) = 1$

$\det(e_1|\ldots|e_n) = 1$

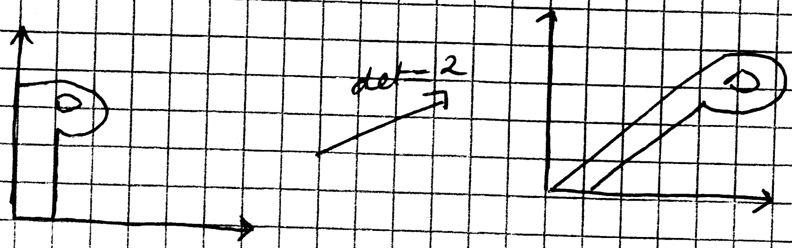
Folgerung:

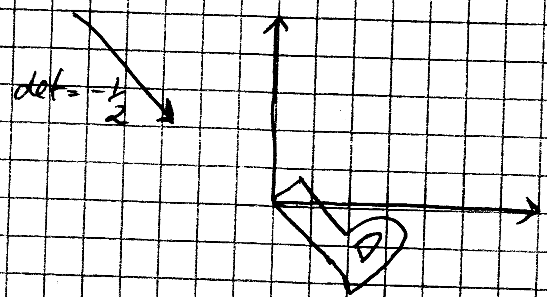
$$\phi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto Ax$$

$|\det(A)|$ = Skalierung der Volumenmessung unter ϕ_A

$\det A > 0 \Leftrightarrow \phi_A$ orientierungstreu

$\det A < 0 \Leftrightarrow \phi_A$ orientierungsumkehrend





4. Etwas mehr Algebra

	$(V,+)$ V $\mathbb{R}$-VR	$GL(n,\mathbb{R})$	S_n
Verknüpfung $M\times M \to M$	Vektoraddition $v+w$	Matrixmultiplikation $A \cdot B$	Verkettung von Abbildungen $\sigma \circ \tau$
assoziativ	✓	✓	✓
neutrales Element	Nullvektor 0	Einheitsmatrix E_n	Identität $id: i \mapsto i$
Inverse	$-v = (-1)v$ reflektierte Vektor	inverse Matrix A^{-1}	Umkehrabbildung σ^{-1}