Ⓐ Gruppen 08.12.15

V $\mathbb{R}$-VR $\quad GL(n, \mathbb{R}) \quad S_n$
$(V, +)$

Def: Eine Gruppe ist eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung (= Abbildung $G \times G \to G$) $* : G \times G \to G$, $(a,b) \mapsto a * b$ statt $*(a,b)$
so dass gilt:

assoziativ: G1) $\forall\, a, b, c \in G$ gilt $(a * b) * c = a * (b * c)$

Es existiert ein Element $e \in G$ mit:

neutrales Element: G2) $e * a = a \quad \forall a \in G$

Inverse: G3) $\forall a \in G \; \exists\, a' \in G$ mit $a' * a = e$

Gilt zusätzlich
K4) $\forall\, a, b \in G: \; a * b = b * a$
so heißt die Gruppe kommutativ bzw. abelsch

Notation: oft G statt $(G, *)$

Beispiele

0) $G = \{e\}$ mit $e * e = e$ triviale Gruppe

1) Sei $(V, +, \cdot)$ $\mathbb{R}$-VR, dann ist $(V, +)$ abelsche Gruppe
G1) - K4) $\iff$ A) - D) aus VR-Def.

2) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ sind abelsche Gruppe
neutrales Element 0, Inverse: $-x$

3) $\cancel{(\mathbb{Z}, \cdot)}$, $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$ abelsche Gruppe
3 hat kein Inverses in $\mathbb{Z}$
neutrales Element: 1
Inverse: $\frac{1}{x}$

4) $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ ist Gruppe
Für $n = 2$, nicht abelsch
Ebenso: $Aut(V) = \{ f : V \xrightarrow{\sim} V \text{ bijektiv} \}$
$(Aut(V), \cdot)$ ist Gruppe

5) $(S_n, \circ)$ ist Gruppe für $n \geq 3$ nicht abelsch

6) Symmetriegruppen

z. B. gegeben $M \subset \mathbb{R}^n$

$\mathrm{Sym}(M) := \{ f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ Isomorph mit $f(M) = M \}$

$\in$ f Symmetrie von M

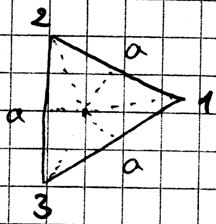
$(\mathrm{Sym}(M), \circ)$ ist Gruppe

$f, g \in \mathrm{Sym}(M)$ $\quad f \circ g\,(M) = f(g(M)) = f(M) = M$

neutrales Element: id

Inverse: f^{-1}, denn $f^{-1}(M) = f^{-1}(f(M)) = id\,(M) = M$

Bsp.:

$M =$ 

$\mathrm{Sym}(M) = \{$ Drehungen um $0°, 120°, 240°$, Spiegelungen an den Winkelhalbierenden $\}$

Drehungen $0°$ $120°$ $240°$

$S_3 = \{ id, (123), (132), (23), (13), (12) \}$

Spiegelungen

$\mathrm{Sym}(M) \stackrel{\wedge}{=} S_3$

$M =$ 

$\mathrm{Sym}(M) = \{$ Drehungen um Vielfache von $90°$, Spiegelungen an den 2 Diagonalen & 2 Seitenhalbierenden $\}$

$0°$ $90°$ $180°$ $270°$

$\stackrel{\wedge}{=} \{ id, (1234), (13)(24), (1432), (13), (24), (14)(23), (12)(34) \}$

Sp. an Diagonalen   Seitenhalbierenden

$\subsetneq S_4$

$S_4 \stackrel{\wedge}{=} \mathrm{Sym}($  $)$

Philosophie: Gruppen $\stackrel{\wedge}{=}$ Symmetrie)

Lema 4.1 Sei $(G, *)$ Gruppe

1. Das neutrale Element (nach (G2)) ist eindeutig bestimmt und es gilt $a * e = a \quad \forall a \in G$.
2. Sei $a \in G$. Das inverse Element a' (nach G3) eindeutig bestimmt und es gilt: $a * a' = e$
   (Wir schreiben ~~...~~ $a^{-1} = a^*$)
3. $\forall a, b \in G$
   $(a^{-1})^{-1} = a \qquad (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

vgl. 1.1 für VR $\qquad$! Reihenfolge

Beweis:

Sei $a \in G$. Wähle ein neutrales Element $e \in G$ und ein inverses Element a' zu a.
(Existenz nach G2 und G3)
Außerdem ein Inverses a'' zu a'.

(**) $a * a' = e * a * a' = a'' * (a' * a) * a' = a'' * (e * a') = a'' * a' = e$

Daher: $a * e = (a * a') * a = e * a = a$

$\Rightarrow$ Eigenschaften in 1 und 2

Eindeutigkeit:

Sei $\tilde{e}$ ~~weiteres~~ neutrales Element.

Dann gilt: $e = \tilde{e} * e = \tilde{e}$

$\Rightarrow e = \tilde{e}$

Sei $\tilde{a}$ weiteres Inverses zu a

$\tilde{a} = \tilde{a} * e = (\tilde{a} * a) * a' = e * a' = a'$

$\Rightarrow \tilde{a} = a'$

zu 3.: Es gilt $a * a^{-1} = e$

$\Rightarrow$ a ist inverses Element zu a^{-1}

Eind. $\Rightarrow a = (a^{-1})^{-1}$

$(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = b^{-1} * e * b = b^{-1} * b = e$

Eind. $\Rightarrow b^{-1} * a^{-1} = (a * b)^{-1}$

Kürzungsregel:

$\forall a, b, c \in G$ gilt:

$a * b = b * c \iff a = b$

$| * c$

$| * c^{-1}$

<u>Def</u>: Sei $U \in G$ teilmenge.

U heißt Untergruppe von G, falls gilt:

U1) $U \neq \emptyset$

U2) $a, b \in U \Rightarrow a * b \in U$

U3) $a \in U \Rightarrow a^{-1} \in U$

<u>Satz 4.2.</u> Sei U Untergruppe. Dann ist $(U, *)$ mit der eingeschränkten Verknüpfung $* : U \times U \to U$ selbst Gruppe.

(Vgl. 1.2 für VR)

<u>Beweis</u>: Nach U2) wird aus der Einschränkung $U \times U \to G$ tatsächlich eine Verknüpfung $U \times U \to U$.

G1) für U folgt aus G1) für G.

G2) $U \neq \emptyset$. Sei $u \in U$ $\overset{U3)}{\Rightarrow} u^{-1} \in U$

$\overset{U2)}{\Rightarrow} u^{-1} * u = e \in U$

G3) folgt aus U3)

Bsp.:

1) $(\{+1, -1\}, \cdot) \subset (\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$ ist UG.

2) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sind UG bzgl $+$

3) $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ist UG von $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$

4) Sei $m \in \mathbb{Z}$. Dann ist $m\mathbb{Z} = \{ma \mid a \in \mathbb{Z}\}$
$= \{\dots, -2n, -n, 0, n, 2n, \dots\}$
ist UG von $(\mathbb{Z}, +)$

4. Etwas mehr Algebra

	$(V,+)$ VR \ VR	$GL(n,\mathbb{R})$	S_n
Verknüpfung $M\times M \to M$	Vektoraddition $v+w$	Matrixmultiplikation $A\cdot B$	Verkettung von Abb $\sigma\circ\tau$
assoziativ	✓	✓	✓
neutrales Element	Nullvektor 0	Einheitsmatrix $\mathbb{1}$	Identität $id: i \mapsto i$
Inverse	reflektierter Vektor $-v=(-1)\cdot v$	Inverse Matrix A^{-1}	Umkehrabb. σ^{-1}

08.12.2015

A) Gruppen

V $\mathbb{R}$-VR $GL(n,\mathbb{R})$ S_n

$(V,+)$

Def: Eine Gruppe ist eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $*$: $G\times G \to G$, $(a,b)\mapsto a*b$

sodass gilt:

G1) $\forall\, a,b,c \in G$ gilt: $(a*b)*c = a*(b*c)$ assoziativ

Es existiert ein Element $e\in G$ mit

G2) $e*a = a \quad \forall\, a\in G$ neutrales Element

G3) $\forall a\in G\ \exists a'\in G$ mit $a'*a = e$ Inverse

Gilt zusätzlich

K4) $\forall\, a,b\in G$: $a*b = b*a$, so heißt die Gruppe kommutativ bzw abelsch

Beispiele: 0) $G = \{e\}$ mit $e * e = e$

~~triviale Gruppe~~

1) Sei $(V, +, \cdot)$ $\mathbb{R}$-VR

Dann ist $(V, +)$ abelsche Gruppe

$G_1) - K4) \Leftrightarrow A) - D)$ aus VR-Def

2) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ sind abelsche Gruppe

neutrales Element 0, Inverse: $-x$

3) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ abelsche Gruppe

neutrales El.: 1

Inverse: $\frac{1}{x}$

4) $(Gl(n, \mathbb{R}), \cdot)$ ist Gruppe

Für $n \geq 2$ nicht abelsch.

Ebenso: $Aut(V) = \{f: V \to V \text{ bijektiv}\}$

$(Aut(V), \circ)$ ist Gruppe

5) $(S_n, \circ)$ ist Gruppe Für $n \geq 3$ nicht abelsch

6) Symmetriegruppen

z.B. gegeben $M \subset \mathbb{R}^n$

$Sym(M) := \{f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ Isomorph. mit } f(M) = M\}$

Ψ

f <u>Symmetrie</u> von M

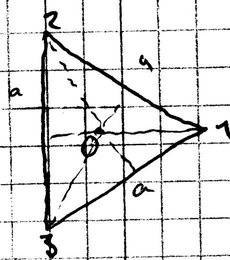
$(Sym(M), \circ)$ ist Gruppe

$f, g \in Sym(M)$. $f \circ g(M) = f(g(M)) = f(M) = M$

neutrale Elemente: id

Inverse: f^{-1}, denn $f^{-1}(M) = f^{-1}(f(M)) = id(M) = M$

Bsp:

$M =$ 

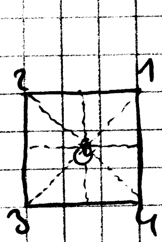
$\mathrm{Sym}(M) = \{$Drehungen um $0°, 120°, 240°$ (gegen Uhrzeigersinn), Spiegelungen an den Winkelhalbierende$\}$

Drehungen $0°$ $120°$ $240°$

$$S_3 = \left\{ \begin{matrix} id, (123), (132) \\ (23), (13), (12) \end{matrix} \right\}$$

Spiegelungen

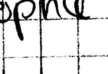
$\mathrm{Sym}(M) \hat{=} S_3$

$M =$ 

$\mathrm{Sym}(M) = \{$Drehungen um Vielfache von $90°$, Spiegelungen an den beiden Diagonalen & 2 Seitenhalbierende$\}$

$$\hat{=} \{ \overset{0°}{id}, \overset{90°}{(1234)}, \overset{180°}{(13)(24)}, \overset{270°}{(1432)},$$
$$(13), (24), (14)(23), (12)(34) \} \subsetneq S_4$$

Spiegeln an Diagonalen, Seitenhalbierenden

$S_4 \hat{=} \mathrm{Sym}($  $)$

Philosophie: Gruppen $\hat{=}$ Symmetrien

Lemma 4.1:
Sei $(G, *)$ Gruppe.
1. Das neutrale Element (nach G2)) ist eindeutig bestimmt und es gilt $a * e = a \; \forall a \in G$
2. Sei $a \in G$, das inverse Element a' (nach G3)) eindeutig bestimmt und es gilt: $a * a' = e$
(Wir schreiben: $a^{-1} = a'$)

3. $\forall a,b \in G$

$$(a^{-1})^{-1} = a \qquad (a*b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$$

(vgl. 1.1 für VR) $\qquad$! Reihenfolge

Beweis:

Sei $a \in G$. Wähle ein neutrales Element $e \in G$ und ein inverses Element a' (Existenz nach G2) & G3)) zu a. Außerdem ein Inverses a'' zu a'.

$$a * a' = e * a * a' = a'' * (a' * a) * a'$$
$$= a'' * (e * a') = a'' * a' = e$$

Daher $\quad a * e = (a * a') * a = e * a = a$

$\Rightarrow$ Eigenschaften der 1. und 2.

Eindeutigkeit:

Sei $\hat{e}$ weiteres neutrales Element

dann gilt: $e = \hat{e} * e = \hat{e} \Rightarrow e = \hat{e}$

Sei $\hat{a}$ weiteres Inverses zu a

$$\hat{a} = \hat{a} * e = (\hat{a} * a) * a' = e * a' = a'$$
$$\Rightarrow \hat{a} = a'$$

zu 3. Es gilt $a * a^{-1} = e$

$\Rightarrow a$ ist inverses Element zu a^{-1}

$\Rightarrow a = (a^{-1})^{-1}$

$$(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = b^{-1} * e * b = b^{-1} * b = e$$

$\xrightarrow{\text{Eindeutigkeit}} \quad b^{-1} * a^{-1} = (a*b)^{-1}$

Kürzungsregel:

$\forall a,b,c \in G$ gilt: $\quad a*c = b*c \Leftrightarrow a=b$

$\| * c$

$\| * c^{-1}$

Def: Sei $U \subset G$ Teilmenge. U heißt Untergruppe von G, falls gilt:

(U1) $U \neq \emptyset$

(U2) $a, b \in U \Rightarrow a * b \in U$

(U3) $a \in U \Rightarrow a^{-1} \in U$

<u>Satz 4.8:</u>

Sei U Untergruppe. Dann ist $(U, *)$ mit der eingeschränkten Verknüpfung $*: U \times U \to U$ selbst Gruppe

vgl 1.2 für VR

<u>Beweis:</u> Nach (U2) wird aus der Einschränkung $U \times U \to G$ tatsächlich eine Verknüpfung $U \times U \to U$.

G1) für U folgt aus G1) für G

G2) $U \neq \emptyset$. Sei $u \in U \Rightarrow \xrightarrow{U3)} u^{-1} \in U$

$\xrightarrow{U2)} u^{-1} * u = e \in U$

G3) folgt aus (U3)

<u>Bsp:</u> 1) $(\{+1, -1\}, \cdot) \subset (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist UG

2) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sind UG ~~von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$~~ bzgl. $+$

3) $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ist UG von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

4) Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist $n\mathbb{Z} = \{na \mid a \in \mathbb{Z}\}$

ist UG von $(\mathbb{Z}, +)$