18.12.15

$(x,y)+(u,w)=(x+u,y+w)$

$(x,y)\cdot(u,w)=(xu-yw,yu+yw)$

$i\in\mathbb{C} \quad i^2=-1$

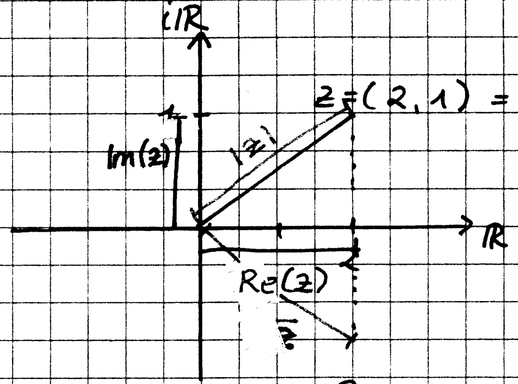
$(x+iy)(u+iw)=xu+i(yu+xw)+i^2yw$

$=(xu-yw)+i(yu+xw)$

$1:=(1,0)=e_1$

$i:=(0,1)=e_2$

$(x,y)=xe_1+ye_2=x+iy$



<u>Def</u>: Sei $z=\overset{\in\mathbb{R}}{x}+i\overset{\in\mathbb{R}}{y}\in\mathbb{C}$

$Re(z)=x\in\mathbb{R}$ <u>Realteil</u> von z

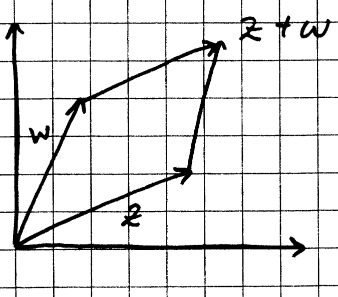
$Im(z)=y\in\mathbb{R}$ <u>Imaginärteil</u>

$\bar{z}=x-iy$ <u>komplex konjugierte Zahl</u>

$|z|:=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\bar{z}}\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ <u>Betrag</u> von z

<u>Geometrische Bedeutung von +, ·</u>

$z+w$:

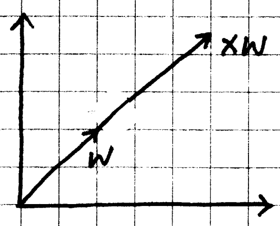


<u>Vektoraddition</u>

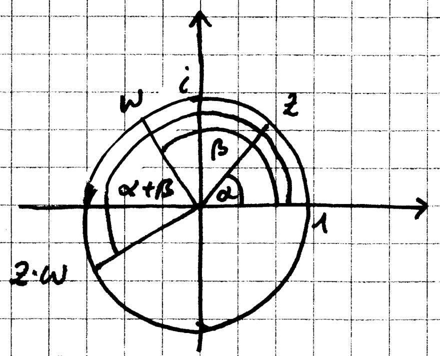
$\underline{z \cdot w}$: 1. Fall: $z = x \in \mathbb{R}$ $\hat{=}$ Skalarmult.

$$x \cdot w = x \cdot (u + iv) = xu + ixv$$

Strecken oder Stauchen



2. Fall: $|z| = |w| = 1$



$$z = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

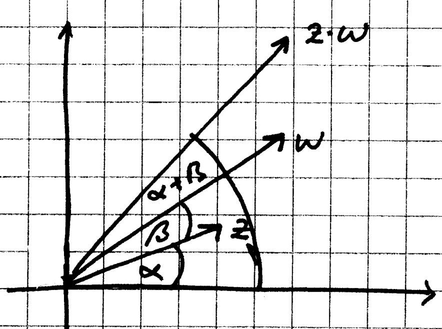
$$z \cdot w = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

Additionstheoreme für sin, cos

Es gilt $|zw| = 1$ und die Winkel werden addiert.

<u>allgemein</u>: $z \neq 0 \neq w$

$$z \cdot w = \underbrace{|z| \cdot |w|}_{\text{1. Fall}} \cdot \underbrace{\frac{z}{|z|} \cdot \frac{w}{|w|}}_{\text{2. Fall}}$$



geometrische Regel für $z \cdot w$
1. Beträge multiplizieren
2. Winkel addieren

Sei $z \in \mathbb{C}$

$$\phi_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad w \mapsto zw$$

ϕ_z ist eine Streckung um Faktor $|z|$ verkettet mit einer Drehung um Winkel α.

Satz 4.9 $z, w \in \mathbb{C}$

a) Für $z \neq 0$ ist $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

b) $\overline{z} + \overline{w} = \overline{z+w}$

c) $\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{z \cdot w}$

d) $\overline{\overline{z}} = z$

e) $z + \overline{z} = 2\,Re(z)$

$z - \overline{z} = 2\,Im(z)$

f) $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

g) $|z| = |\overline{z}|$

h) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

i) $|z + w| \cancel{=} \leq |z| + |w|$ Dreiecksungleichung

Warum $\mathbb{C}$?

1) historisch

kubische Gleichungen lösen

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

hat 3 reelle Lösung, aber die Lösungsformel verlangen mit komplexen Zahlen zu rechnen. (1545)

2) Algebra

$x^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung, aber $(x-i)(x+i)$

Satz 4.10 (Fundamentalsatz der Algebra, 1800)

Sei $f = a_0 + a_1 X^1 + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$, $a_i \in \mathbb{C}$ ein komplexes Polynom.

Dann existiert $w \in \mathbb{C}$ mit $f(w)=0$ <u>Nullstelle</u>

3) <u>heute</u> : taucht $\mathbb{C}$ überall auf

Elektrotechnik, Quantenmechanik

(F) allgemeiner VR

<u>Def</u>: Sei K Körper. Ein K-VR V ist eine Menge V zusammen mit zwei Abbildungen:

$$+ : V \times V \to V$$

$$\cdot : K \times V \to V$$

mit:

A) - D) $(V, +)$ abelsche Gruppe

Für alle $\lambda, \mu \in K$, $u, v \in V$ gilt:

E) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu) v$

F) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$

G) $(\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v$

H) $1 u = u$

(!) Die ganze Theorie in Kapitel 1) - 3) basiert nur auf Axiom A) - H) und den Körperaxiomen (insbesondere: Existiert λ^{-1} falls $\lambda \neq 0$)

<u>Alles</u> lässt sich auf K-VR übertragen (überall $\mathbb{R}$ durch K ersetzen)

LGS über K, GA, $Mat(n \times n, K)$ $a_{ij} \in K$

LK mit Koeff. in K, Dimension $\dim_K(V)$

Determinante $\det(A) \in K$

Bsp.:

lassen Striche oft weg

$$A = \begin{pmatrix} \overline{3} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{3} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{F}_4)$$

KEIN Körper, aber Ring

$$\det(A) = \overline{3}\cdot\overline{3} - \overline{2}\cdot\overline{2} = \overline{9-4} = \overline{5} = \overline{1} \neq \overline{0}$$

$\Rightarrow$ A invertierbar

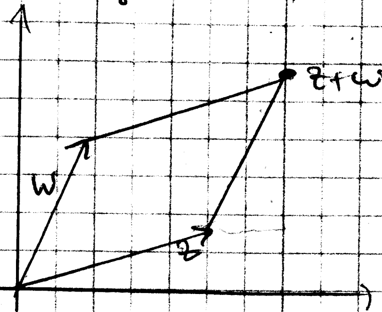
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Rechnen mod 4 $\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A$$

geometrische Bedeutung von $+, \cdot$

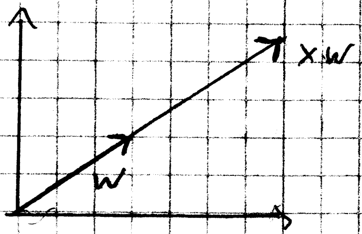
$\underline{z+w}$:



Vektoraddition

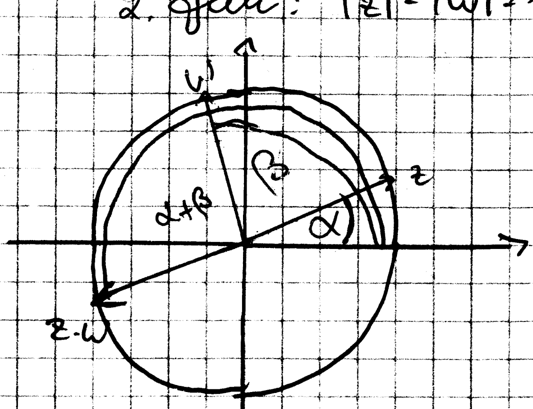
$z \cdot w$: 1. Fall: $z = x \in \mathbb{R}$ $\hat{=}$ Skalarmultiplikation

$$z \cdot w = x(u+iv) = xu + ixv$$



Strecken oder Stauchen

2. Fall: $|z| = |w| = 1$ $\quad z = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$



$$z \cdot w = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \underset{\text{Additionstheoreme}}{=} \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

Es gilt $|zw| = 1$ & die Winkel werden addiert.

__allgemein:__ $z \neq 0 \neq w$

$$z \cdot w = \underbrace{|z| \cdot |w|}_{\text{1. Fall}} \cdot \underbrace{\frac{z}{|z|} \cdot \frac{w}{|w|}}_{\text{2. Fall}}$$

> geometrische Regel für $z \cdot w$:
> 1. Beträge multiplizieren
> 2. Winkel addieren!

Notation: $0 := (0,0)$

$1 := (1,0)$

$i := (0,1)$

$1, i \mathrel{\hat{=}}$ Standardbasis von $\mathbb{R}^2$

18.12.2015

$(x,y) + (u,w) = (x+u, y+w)$

$(x,y) \cdot (u,w) = (xu - yw, yu + xw)$

$i \in \mathbb{C} \quad i^2 = -1$

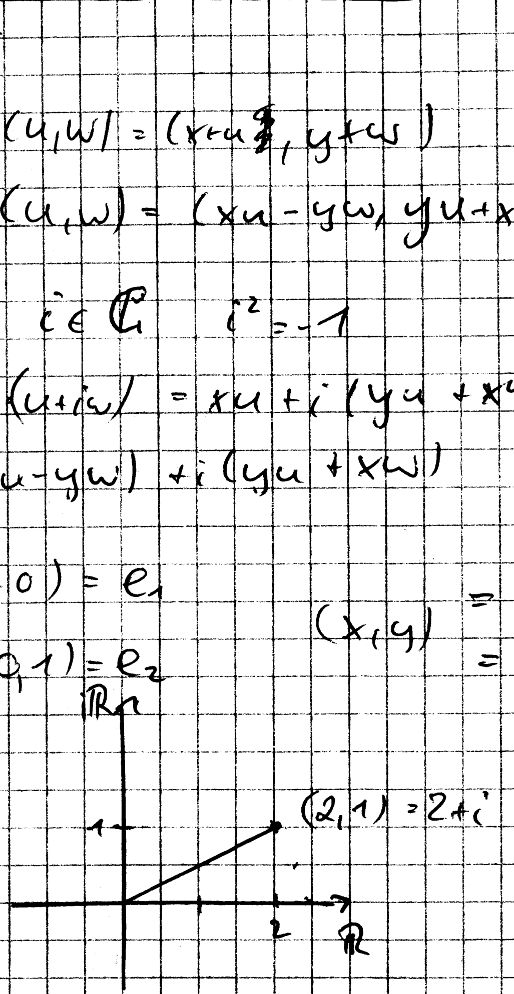
$(x+iy)(u+iw) = xu + i(yu + xw) + i^2 yw$

$= (xu - yw) + i(yu + xw)$

$1 := (1,0) = e_1$

$i := (0,1) = e_2$

$(x,y) = xe_1 + ye_2 = x + iy$



<u>Def:</u> Sei $z = \overset{\in\mathbb{R}}{x} + i\overset{\in\mathbb{R}}{y} \in \mathbb{C}$

$\mathrm{Re}(z) = x \in \mathbb{R}$ <u>Realteil</u> von z

$\mathrm{Im}(z) = y \in \mathbb{R}$ <u>Imaginärteil</u>

$\bar{z} = x - iy$ <u>komplex konjugierte Zahl</u> von z

$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ <u>Betrag</u> von z

Sei $z \in \mathbb{C}$

$$\Phi_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$w \mapsto zw$$

Φ_z ist eine Streckung um Faktor $|z|$ verkettet mit einer Drehung um Winkel α.

a) Für $z \neq 0$ ist $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

b) $\bar{z} + \bar{w} = \overline{z+w}$

c) $\bar{z} \cdot \bar{w} = \overline{zw}$

d) $\overline{\overline{z}} = z$

e) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ $\quad$ $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

f) $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$

g) $|z| = |\bar{z}|$

h) $|zw| = |z| \cdot |w|$

i) $|z+w| \leq |z| + |w|$ Dreiecksungleichung

Warum $\mathbb{C}$?

1) historisch

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ hat 3 reelle Lösungen, aber die Lösungsformel verlangen mit komplexen Zahlen zu rechnen (anno 1545)

2) Algebra $\quad x^2 + 1 = 0$ keine reelle Lösungen

aber $(x-i)(x+i)$

Satz 4.10 (Fundamentalsatz der Algebra, anno 1800)

Sei $f = a_0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{C}[x]$, $a_i \in \mathbb{C}$ ein komplexes Polynom.

Darum existiert $w \in \mathbb{C}$ mit $f(w) = 0$. Nullstelle

3) heute: taucht $\mathbb{C}$ überall auf.

Elektrotechnik, Quantenmechanik

(F) allgemeine VR

Def: Sei K Körper. Ein K-VR V ist eine Menge V zusammen mit zwei Abbildungen

$+: V \times V \longrightarrow V$

$\cdot : K \times V \longrightarrow V$

mit:

A–D) $(V, +)$ abelsche Gruppe

Für alle $\lambda, \mu \in K$, $u, v \in V$ gilt:

E) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu) v$

F) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$

G) $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$

H) $1u = u$

(!) Die gesamte Theorie in Kapiteln 1–3) basiert nur auf Axiomen A)–H) und den Körperaxiomen (insbesondere: Existenz λ^{-1} falls $\lambda \neq 0$)

Alles lässt sich auf K-VR übertragen (überall $\mathbb{R}$ durch K ersetzen)

LGS über K, GA, $\mathrm{Mat}(n \times m, K)$ $a_{ij} \in K$

LK mit Koeff. in K

Dimension $\dim_K(V)$

Determinante $\det(A) \in K$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{3} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{F}_4)$ lassen Striche oft weg — KEIN KÖRPER (aber Ring)

$\det(A) = \bar{3} \cdot \bar{3} - \bar{2} \cdot \bar{2} = \overline{9-4} = \bar{5} = \bar{1} \neq \bar{0}$

$\Rightarrow$ A ist invertierbar

Inverse berechnen

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Rechnen mod 4}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A$$