Bsp.: lassen Striche oft weg

$A = \begin{pmatrix} \overline{3} & 2 \\ \overline{2} & \overline{3} \end{pmatrix} \in Mat(2 \times 2, \mathbb{F}_4)$ KEIN Körper, aber Ring

$det(A) = \overline{3} \cdot \overline{3} - \overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{9-4} = \overline{5} = \overline{1} \neq \overline{0}$

$\Rightarrow A$ invertierbar

$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Rechnen mod 4 $\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A$

05.01.16

5. Diagonalisieren

A Eigenwerte

Erinnerung: $A, B \in Mat(n \times m, K)$

A und B äquivalent $:\Leftrightarrow \exists\, S, T$ invertierbar mit $B = SAT^{-1}$

Satz 2.16 Jedes A ist äquivalent zu $\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

$0 \leq r \leq \min(n, m)$

Rang $A = r$

Kor: A und B äquivalent $\Leftrightarrow$ Rang A = Rang B

D.h. es gibt genau $\min(n,m)$ Klassen von äquivalenten Matrizen.

Außerdem enthält jede Klasse einen besonders einfachen Repräsentanten, nämlich $\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ Normalform

eben: lineare Abbildungen $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

jetzt: $f \in End(V)$ $\quad f: V \to V$

A und B ähnlich $:\Leftrightarrow$ $\exists\, T$ invertierbar mit $B = TAT^{-1}$

Klassifizierung? Normalform?

(ab jetzt: V ist K-VR)

Vorschlag:

Def.: $f \in End(V)$ heißt diagonalisierbar, falls eine Basis B von V existiert mit

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in K$$

$A \in Mat(n \times n, K)$ heißt diagonalisierbar, falls $T \in GL(n,K)$ existiert mit $TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ Diagonalmatrix

∇ Nicht alle Matrizen sind diagonalisierbar

Kriterien?

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_i = \lambda_i e_i$$

Def.: Sei $f: V \to V$ ein Endomorphismus

$\lambda \in K$ heißt Eigenwert von f falls $v_{\neq 0} \in V$ mit

$\boxed{f(v) = \lambda v}$

v heißt dann Eigenvektor von f (bzgl. EW λ)

Die Menge $Eig(f, \lambda) = \{ v \in V \mid f(v) = \lambda v \}$ aller Eigenvektoren (und 0) heißt Eigenraum von f zu λ.

Analoge Def. für A statt f.

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor von A zum EW $\lambda = 1$

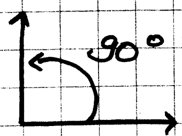
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV von A zum EW $\lambda = 2$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist kein Eigenvektor

Bem.: f diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ V besitzt Basis aus Eigenvektoren von f.

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



Drehung um $90°$

$\Rightarrow$ A hat <u>keine</u> Eigenvektoren

Lema 5.1

a) $Eig(f, \lambda) = Ker(f - \lambda \cdot Id)$ $\quad Id: V \to V,\ x \mapsto x$

Insbesondere ist $Eig(f, \lambda) \subset V$ UVR

b) Sei $B = TAT^{-1}$. Dann gilt $Eig(B, \lambda) = T(Eig(A, \lambda))$

Insbesondere haben A und B dieselben Eigenwerte.

Beweis:

a) $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow f(v) - \lambda v = 0$

$\Leftrightarrow (f - \lambda Id)(v) = 0$

b) Sei $w \in T(Eig(A, \lambda))$

Also $w = Tv$ mit $v \in Eig(A, \lambda)$

$Bw = TAT^{-1}w = TAT^{-1}Tv = TAv = T\lambda v \stackrel{!}{=} \lambda Tv = \lambda w$

$\Rightarrow w \in Eig(B, \lambda)$

$\Rightarrow T(Eig(A, \lambda)) \subseteq Eig(B, \lambda)$

Analog: $T^{-1}(Eig(B, \lambda)) \subseteq Eig(A, \lambda)$

$\Rightarrow$ " = "

Lema 5.2

Seien $v_1, \dots, v_m$ Eigenvektoren von f zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Dann sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig.

Beweis: Induktion über m.

IA: $m=1$. v_1 lin. unabh. da $v_1 \neq 0$

IS: $(m-1 \to m)$

Sei $\mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m = 0$ (I)

f anwenden: $0 = f(0) = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \dots \mu_m \lambda_m v_m$ (II)

(II) $- \lambda_m$(I) (v_m fällt weg)

$$(\lambda_1 - \lambda_m)\mu_1 v_1 + \dots + (\lambda_{m-1} - \lambda_m)\mu_{m-1} v_{m-1} = 0$$

IV: $v_1, \dots, v_{m-1}$ lin. unabh.

$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_m)\mu_1 = \dots = (\lambda_{m-1} - \lambda_m) \cdot \mu_{m-1} = 0$

ABER: λ_i paarweise versch. $\Rightarrow \lambda_i - \lambda_m \neq 0$

$\Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_{m-1} = 0$

$\Rightarrow \mu_m v_m = 0 \Rightarrow \mu_m = 0$

⚠ gilt in jedem Körper

Kor 5.3 $\dim(V) = n$

Hat $f \in \mathrm{End}(V)$ n paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, dann ist f diagonalisierbar

Lema 5.4

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ paarweise verschiedene Eigenwerte von f und $V_1, \dots, V_m$ die zugehörigen Eigenräume.
Sei B_i Basis für V_i. Dann ist $B_1, \dots, B_m$ Basis für $V_1 + \dots + V_m$ (wir schreiben: $V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ (vgl. direkte Summe)

Beweis: Sei $\sum_{v_i \in B_1, \dots, B_m} \lambda_i v_i = 0$ eine LK der Vektoren

aus $B_1, \dots, B_m$

Betrachte $w_j = \sum_{v_i \in B_j} \lambda_i v_i$ der Teil der LK, der nur

Basis B_j gehört. Es gilt: $w_1 + \ldots + w_m = 0$

$w_j \in V_j$, also EV zum EW λ_j
(oder 0)

$\overset{5.2}{\Longrightarrow} w_1 = \ldots = w_m = 0$

Aber alle B_j Basen, also $\lambda_i = 0$

<u>Kor 5.5.</u> f diagonalisierbar

$\Leftrightarrow$ Summe der Dimensionen der ER ist gleich

$n = \dim(V)$

(Wir schreiben: $V = \mathrm{Eig}(f, \lambda_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Eig}(f, \lambda_m)$

λ_i Eigenwerte

Wie können wir EW λ_i bzw. $\dim(\mathrm{Eig}(f, \lambda_i))$ best.?

③ Das charakteristische Polynom

K Körper

unbestimmte

$n = \deg(f)$
Grad von f

Polynom $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$

formal: <u>endliche</u> Folgen, d.h. $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $a_i = 0 \ \forall i > n$

$\mathbb{N} \cup \{0\} \to K$

⚠ f liefert Polynomfunktion $\phi_f : K \to K$
$a \mapsto f(a)$

ABER:

z.B. $K = \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Dann ist $x^2 \neq x$ (unterschdl. Polynome),

aber $\phi x^2 = \phi x$, da $0^2 = 0$ und $1^2 = 1$

5. Diagonalisieren

(A) Eigenwerte

Erinnerung: $A, B \in Mat(n \times m, K)$

A und B heißen äquivalent: (wenn sie bezüglich verschiedener Basen die selbe Abb darst.)

$\iff \exists\, S, T$ invertierbar mit

$B = SAT^{-1}$

Satz 2.16: Jedes A ist äquivalent zu $\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

$0 \leq r \leq \min(n, m)$

Rang $A = r$

Kor: A & B äquivalent $\iff$ Rang A = Rang B

D.h. es gibt genau $\min(n, m)$ Klassen von äquivalenten Matrizen

Außerdem enthält jede Klasse einen besonders einfachen Repräsentanten nämlich $\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ Normalform

Chr: Lineare Abb $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

jetzt: $f \in End(V)$: $f: V \to V$

A und B ähnlich $:\iff \exists\, T$ invertierbar mit $B = TAT^{-1}$

Klassifizierung? Normalform?

Vorschlag: (ab jetzt ist V ein K-VR)

Def: $f \in End(V)$ heißt diagonalisierbar falls eine Basis $\mathcal{B}$ von V existiert mit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in K$$

$A \in Mat(n \times n, K)$ heißt <u>diagonalisierbar</u>, falls $T \in GL(n, K)$ existiert mit $TAT^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\text{Diagonalmatrix}}$

⚠ Cave: Nicht alle Matrizen sind diagonalisierbar.

Kriterium?

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_i = \lambda_i e_i$$

Def: Sei $f: V \to V$ ein Endomorphismus. $\lambda \in K$ heißt <u>Eigenwert</u> von f, falls $v \neq 0 \in V$ mit

$$f(v) = \lambda v$$

v heißt dann <u>Eigenvektor von</u> f (bzgl. EW λ)

Die Menge $Eig(f, \lambda) = \{ v \in V \mid f(v) = \lambda v \}$ aller Eigenvektoren (und 0) heißt <u>Eigenraum</u> von f zu λ.

Analoge Def. für A statt f.

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist EV von A zum EW $\lambda = 1$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ " " " $\lambda = 2$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist <u>kein</u> Eigenvektor

Bem. f diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ V besitzt Basis aus EV von f

Bsp

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Drehung um $90°$

$\Rightarrow$ A hat <u>keine</u> Eigenvektoren

<u>Lemma 5.1</u>

a) $\mathrm{Eig}(f, \lambda) = \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{Id})$

Insbesondere ist $\mathrm{Eig}(f, \lambda) \subset U$ UVR.

b) Sei $B = TAT^{-1}$. Dann gilt:

$\mathrm{Eig}(B, \lambda) = T(\mathrm{Eig}(A, \lambda))$

Insbesondere haben A & B dieselben EW.

Beweis:

a) $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow f(v) - \lambda v = 0$

$\Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{Id})(v) = 0$

b) Sei $w \in T(\mathrm{Eig}(A, \lambda))$

Also $w = Tv$ mit $v \in \mathrm{Eig}(A, \lambda)$.

$Bw = TAT^{-1} w = TAT^{-1} Tv = TAv = T\lambda v = \lambda w$

$\Rightarrow w \in \mathrm{Eig}(B, \lambda)$

$\Rightarrow T(\mathrm{Eig}(A, \lambda)) \subseteq \mathrm{Eig}(B, \lambda)$

Analog: $T^{-1}(\mathrm{Eig}(B, \lambda)) \subseteq \mathrm{Eig}(A, \lambda)$

$\Rightarrow$ "$=$"

Lemma 5.2 Seien $v_1, \dots, v_m$ Eigenvektoren von f zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabh. ~~da $v_1 \neq 0$~~

Beweis: Induktion über n

IA: $m=1$ v_1 lin unabh. da $v_1 \neq 0$

IS: ~~[illegible]~~ $(m-1 \to m)$.

Sei $\mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m = 0$ $\qquad (\mathrm{I})$

f anwenden: $0 = f(0) = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \mu_m \lambda_m v_m \; (\mathrm{II})$

$(\mathrm{II}) - \lambda_m (\mathrm{I})$: ($v_m$ fällt weg)

$$(\lambda_1 - \lambda_m)\mu_1 v_1 + \dots + (\lambda_{m-1} - \lambda_m)\mu_{m-1} v_{m-1} = 0$$

IV: $v_1, \dots, v_{m-1}$ lin unabh.

$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_m)\mu_1 = \dots = (\lambda_{m-1} - \lambda_m) \cdot \mu_{m-1} = 0$

ABER: λ_i paarweise versch. $\Rightarrow \lambda_i - \lambda_m \neq 0$

$\Rightarrow \mu_1 = \dots = \mu_{m-1} = 0$

$\Rightarrow \mu_m v_m = 0 \Rightarrow \mu_m = 0$

$\triangledown$ gilt in jedem Körper

Kor 5.3. $\dim(V) = n$

Hat $f \in \mathrm{End}(V)$ n paarweise verschiedene EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, dann ist f diagonalisierbar

~~Kor. 5.3 dim(V)=n~~
~~Hat f ∈ End(V) ...~~

Lemma 5.4 Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ paarweise verschiedene Eigenwerte von f & $V_1, \dots, V_m$ die zugehörige Eigenräume. Sei B_i Basis für V_i. Dann ist $B_1, \dots, B_m$ Basis für $V_1 + \dots + V_m$. (Wir schreiben: $V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ (vgl. direkte Summe))

Beweis

Sei $w_j = \sum_{v_i \in B} \lambda_i v_i = 0$ eine LK der Vektoren aus $B_1, \dots, B_m$

Betrachte $w_j = \sum_{v_i \in B_j} \lambda_i v_i$ der Teil der LK, der zur Basis B_j gehört

Es gilt: $w_1 + \dots + w_m = 0$

$w_j \in V_j$, also EV zum EW λ_j oder 0 $\overset{5.3}{\Rightarrow}$ $w_1 = \dots = w_m = 0$

Aber alle B_j Basen, also $\lambda_i = 0$

Kor. 5.5: f diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Summe der Dimension der ER (Eigenraum) ist gleich $n = \dim(V)$

(Wir schreiben: $V = \mathrm{Eig}(f, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Eig}(f, \lambda_m)$

λ_i Eigenwerte

Wie können wir EW λ_i bzw $\dim(\mathrm{Eig}(f, \lambda_i))$ bestimmen?

B) Das charakteristische Polynom

K Körper

<u>Polynom</u> $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ → Unbestimmte, $n = \deg(f)$ Grad von f.

~~Polynom~~

formal: <u>endliche</u> Folge $\mathbb{N} \cup \{0\} \to K$

d.h. $\exists n \in \mathbb{N}$ und $a_i = 0 \ \forall i > n$

⚠ f heißt Polynomfkt

$$\phi_f : K \to K$$
$$a \mapsto f(a)$$