08.01.2018

$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad , a_i \in K$

$K[x] = \{ f(x) \mid f \text{ Polynom} \}$ Polynomring

$\left(\sum a_i x^i\right) + \left(\sum b_i x^i\right) = \left(\sum (a_i + b_i) x^i\right)$

$\left(\sum a_i x^i\right) \cdot \left(\sum b_i x^i\right) = \left(\sum c_i x^i\right) \quad , \quad c_i = \sum_{\substack{k,l \\ k+l=i}} a_k b_l$

$K[x]$ ist kommutativer Ring

Es gilt: $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$

Def: Sei $A \in Mat(n \times n, K)$. Dann heißt

$$\chi_A(x) = \det(A - x \mathbb{1}_n) \in K[x]$$

das charakteristische Polynom von A.

genauer:

$$A - \mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} - x \end{pmatrix} \in Mat(n \times n, K[x])$$

$A \in Mat(n \times n, \underset{\text{Ring}}{R}) \rightsquigarrow \underbrace{\det A}_{\text{Leibniz-Formel benutzt keine Inverse}} \in R$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - x\mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} 1-x & 2 & 1 \\ 1 & -x & -4 \\ 3 & 0 & 1-x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - x \mathbb{1}_3) &= (1-x)(-x)(1-x) + 2 \cdot (-4) \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 0 \\ &\quad - 3 \cdot (-x) \cdot 1 - 0 - (1-x) \cdot 1 \cdot 2 \\ &= -x^3 + 2x^2 - x - 24 + 3x - 2 + 2x = -x^3 + 2x^2 + 4x - 26 \end{aligned}$$

Bemerkung:

1) $\deg(\chi_A) = n$ denn nur im Diagonalterm von $\det(A - x\mathbb{1}_n)$ tritt ein x^n-Term auf

2) $B = TAT^{-1} \Rightarrow \chi_B = \chi_A$

$$\chi_B = \det(B - x\mathbb{1}_n) = \det(TAT^{-1} - xT\mathbb{1}_nT^{-1}) = \det(T(A - xE_n)T^{-1})$$
$$= \det(T) \cdot \chi_A \underbrace{\det(T^{-1})}_{=\det(T)^{-1}} = \chi_A$$

Definition: $f: V \to V$ Endom.

Wir definieren: $\det(f) := \det(M_B^B(f)) \in K$

$$\chi_f(x) := \chi_{M_B^B(f)}(x) = \det(M_B^B(f) - xE_n)$$

für beliebige Basis B von V (unabhängig von Basis nach Bemerkung ~~Berechnung~~)

Korollar 5.6.

$\lambda \in K$ ist EW von $f \iff \chi_f(\lambda) = 0$, λ ist Nullstelle von χ_f

Beweis: LS $\Updownarrow$ $\ker(A - \lambda E_n) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda \mathbb{1}_n) = 0$ $\Updownarrow$ RS

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\chi_A = (1-x)(2-x)$

NS: 1, 2

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Drehung um $90°$ $\chi_A = \det\begin{pmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x^2 + 1$

hat keine reellen NS $\hat{=}$ A keine EW $\in \mathbb{R}$ besitzt

Lemma 5.7 $f \in K[x]$, $\lambda \in K$

$f(\lambda) = 0 \iff (x - \lambda) \mid f$ ($(x-\lambda)$ teilt f d.h. $\exists g \in K[x]$ mit $(x-\lambda)\cdot g = f$)

Beweis: „$\Leftarrow$" klar

„$\Rightarrow$" Polynomdivision $f = g \cdot (x - \lambda) + \underset{\in K}{r}$

$f(\lambda) = 0 \iff r = 0$

Bem: Insbesondere hat f höchstens $\deg(f)$ viele Nullstellen

Definition: Sei $\lambda \in K$ Nullstelle von f. Sei $r \in \mathbb{N}$ mit $f = (x-\lambda)^r \cdot g$ mit $g(\lambda) \neq 0$. Dann heißt r die Vielfachheit der NS λ.

Lemma 5.8. Sei r die Vielfachheit von λ in χ_f

$\dim(\mathrm{Eig}(f,\lambda)) \leq r$

Beweis: $\dim \mathrm{Eig}(f,\lambda) =: s$

Sei $v_1, \dots, v_s$ Basis von $\mathrm{Eig}(f,\lambda)$.

Ergänze zu Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ von V

$$M_B^B(f) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{matrix} & * \\ \hline 0 & A \end{array}\right) \Big\}\, s$$

$\underbrace{\hphantom{xxxxx}}_{s}$

$\chi_f = (\lambda - x)^s \chi_A$

$\Rightarrow s \leq r$

<u>Satz</u> 5.9

f ist genau dann diagonalisierbar, wenn gilt:

1) χ_f zerfällt (über K) in Linearfaktoren

2) die Vielfachheit jeder NS λ von χ_f ist $\dim(\mathrm{Eig}(f,\lambda))$.

<u>Beweis</u>: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ paarweise verschiedenen EW von f und $s_i := \dim(\mathrm{Eig}(f,\lambda_i))$ und r_i = Vielfach von λ_i in χ_f

Es gilt: $$\sum_{i=1}^m s_i \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Gleichheit} \\ \text{gdw 2) gilt}}}{\overset{5.8}{\leq}} \sum_{i=1}^m r_i \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Gleichheit gdw 1) gilt}}}{\overset{5.7}{\leq}} \deg \chi_f = n$$

Beh. folgt dann aus 5.5

f diagonalisierbar $\Leftrightarrow \sum s_i = n$

(C) Diagonalisierung

(Test und Verfahren)

Gegeben $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$

Frage: 1. Ist A diagonalisierbar?

2. Falls ja, berechne $T \in Gl(n,K)$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} = TAT^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad -x^3+4x^2-4x$$

1. χ_A berechnen

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} -x & -1 & 1 \\ 1 & 2-x & -1 \\ -1 & -1 & 2-x \end{pmatrix} = -x(2-x)^2 - 1 - 1 + 2 - x + x + 2 - x$$

$$= -x^3 + 4x^2 - 5x + 2$$

2. NS finden

$x = 1$ da $-1+4-5+2 = 0$

Polynomdivision:

$$(-x^3+4x^2-5x+2)(x-1) = -x^2+3x-2$$

pq-Formel:

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$\chi_A = -(x-1)^2 (x-2)$$

3. Eigenräume berechnen:

EW 1: $\mathrm{Eig}(A,1) = \mathrm{Ker}(A - 1E_3)$

$$A - 1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{GA} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Eig}(A,1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\dim = 2 =$ Vielfachheit von 1

(Zwischenergebnis: A ist diagonalisierbar da Bed 2) trivial für einfache Nullstellen)

EW 2:

$$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Eig}(A,2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

4. Basiswechsel zu Eigenvektoren:

$$B = (e_1, \dots, e_n) \longrightarrow B' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$A = M_B^B \qquad M_{B'}^{B'} = T_{B'}^B \, M_B^B \, T_B^{B'}$$

$$D = T \; A \; T^{-1}$$

$$T^{-1} = T_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverses berechnen:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Test: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}$

08.01.16

$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n \quad , a_i \in K$

$K[x] = \{ f(x) \mid f \text{ Polynom} \}$ Polynomring

$(\sum a_i x^i) + (\sum b_i x^i) = (\sum (a_i + b_i) x^i)$

$(\sum a_i x^i) \cdot (\sum b_i x^i) = (\sum c_i x^i) \qquad c_i = \sum_{\substack{k,l \\ k+l=i}} a_k b_l$

$K[x]$ ist kommutativer Ring

Es gilt: $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$

<u>Def.</u>: Sei $A \in Mat(n \times n, K)$

Dann heißt:

$$\chi_A(x) = \det(A - x E_n) \in K[x]$$

das <u>charakteristische Polynom</u> von A

genauer:

$$A - x E_n = \begin{pmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1 n} \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - x \end{pmatrix} \in Mat(n \times n, K[x])$$

$A \in Mat(n \times n, \underset{\text{Ring}}{R}) \rightsquigarrow \det A \in R$

$\hookrightarrow$ Leibniz-Formel benutzt <u>keine</u> Inverse

<u>Bsp.</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A - x E_3 = \begin{pmatrix} 1-x & 2 & 1 \\ 1 & -x & -4 \\ 3 & 0 & 1-x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - x E_3) &= (1-x)(-x)(1-x) + 2(-4)3 + 1 \cdot 1 \cdot 0 \\ &\quad - 3(-x)1 - 0(-4)(1-x) - (1-x) \cdot 1 \cdot 2 \\ &= -x^3 + 2x^2 - x - 24 + 3x - 2 + 2x \\ &= -x^3 + 2x^2 + 4x - 26 \end{aligned}$$

Bem.:

1) $\deg(\chi_A) = n$ denn <u>nur</u> im Diagonalterm von $\det(A - xE_n)$ tritt ein x^n-Term auf.

2) $B = TAT^{-1} \Rightarrow \chi_B = \chi_A$

$$\chi_B = \det(B - xE_n) = \det(TAT^{-1} - xTE_nT^{-1}) = \det(T(A - xE_n)T^{-1})$$
$$= \det(T) \cdot \chi_A \det(T^{-1}) = \chi_A$$

Def.: $f: V \to V$ Endom.

Wir definieren:

$$\det(f) := \det(M_B^B(f)) \in K$$
$$\chi_f(x) := \chi_{M_B^B(f)}(x) = \det(M_B^B(f) - xE_n)$$

für beliebige Basis B von V. (unabhängig von Basis nach Bemerkung.

Korollar 5.6: $\lambda \in K$ ist EW von $f \Leftrightarrow \chi_f(\lambda) = 0$, λ ist Nullstelle von χ_f

Beweis:

$$\begin{array}{ccc} LS & & RS \\ \hat{\Updownarrow} & & \hat{\Updownarrow} \\ \ker(A - \lambda E_n) \neq \{0\} & \Leftrightarrow & \det(A - \lambda E_n) = 0 \end{array}$$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\chi_A = (1-x)(2-x)$ NS: 1, 2

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Drehung um $90°$

$\chi_A = \det\begin{pmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x^2 + 1$ hat keine reellen NS

$\hat{=}$ A keine EW $\in \mathbb{R}$ besitzt

Lemma 5.7: $f \in K[x]$, $\lambda \in K$

$$f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x - \lambda) \mid f}_{(x-\lambda) \text{ teilt } f}$$

(d.h. $\exists\, g \in K[x]$ mit $(x - \lambda)g = f$)

Beweis: "$\Leftarrow$" klar

"$\Rightarrow$" Polynomdivision

$$f = g \cdot (x - \lambda) + r_{\in K}$$

$$f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow r = 0$$

Bem.: Insbesondere hat f höchstens $\deg(f)$ viele Nullstellen.

Def.: Sei $\lambda \in K$ Nullstelle von f. Sei $r \in \mathbb{N}$ mit $f = (x-\lambda)^r \cdot g$ mit $g(\lambda) \neq 0$

Dann heißt r die Vielfachheit der NS λ.

Lemma 5.8: Sei r die Vielfachheit von λ in χ_f

$$\dim(\mathrm{Eig}(f, \lambda)) \leq r$$

Beweis: $\dim(\mathrm{Eig}(f, \lambda)) =: s$

Sei $v_1, \ldots, v_s$ Basis von $\mathrm{Eig}(f, \lambda)$

Ergänze zu Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ von V

$$M_B^B(f) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{matrix} & * \\ \hline 0 & A \end{array}\right) \begin{matrix} \} s \\ \\ \end{matrix}$$

$$\underbrace{\hspace{2em}}_{s}$$

$$\chi_f = (\lambda - x)^s \cdot \chi_A$$

$$\Rightarrow s \leq r$$

Satz 5.9: f ist genau dann diagonalisierbar, wenn gilt:

1) χ_f zerfällt (über K) in Linearfaktoren
2) die Vielfachheit jeder NS λ von χ_f ist $(\dim(\mathrm{Eig}(f, \lambda))$.

Beweis: Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ paarweise verschiedene EW von f und $s_i := \dim(\mathrm{Eig}(f, \lambda_i))$ und $r_i :=$ Vielfachheit von λ_i in χ_f

Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} s_i \overset{5.8}{\leq} \sum_{i=1}^{m} r_i \overset{5.7}{\leq} \deg \chi_f = n$$

Gleichheit genau falls 2) gilt — Gleichheit genau falls 1) gilt

Beh. folgt dann aus 5.5. f diagonalisierbar $\Leftrightarrow \sum s_i = n$

© Diagonalisierung (Test und Verfahren)

Gegeben: $A \in Mat(n \times n, K)$

Frage: 1. Ist A diagonalisierbar?

2. Falls ja, berechne $T \in GL(n, K)$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = TAT^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. χ_A berechnen

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} -x & -1 & 1 \\ 1 & 2-x & -1 \\ -1 & -1 & 2-x \end{pmatrix} = -x(2-x)^2 - 1 - 1 + 2 - x + x + 2 - x$$

$$= -x^3 + 4x^2 - 5x + 2$$

2. NS finden

$x = 1$ da $-1 + 4 - 5 + 2 = 0$

Polynomdivision

$$(-x^3 + 4x^2 - 5x + 2) : (x - 1) = -x^2 + 3x - 2$$

p.q. Formel: $x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = 1, 2$

$$\chi_A = -(x-1)^2 \cdot (x-2)$$

3. Eigenräume berechnen

EW1 $\quad Eig(A, 1) = \ker(A - 1E_3)$

$$A - 1E_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{GA}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Eig(A,1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

dim = 2 = Vielfachheit von 1

(Zwischenergebnis: A ist diagonalisierbar, da Bed 2) trivial für einfache Nullstellen)

EW 2:

$$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Eig(A,2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

4. Basiswechsel zu Eigenvektoren

$$B = (e_1, \dots, e_n) \rightsquigarrow B' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$A = M_B^B \qquad M_{B'}^{B'} = T_{B'}^{B} \, M_B^B \, T_B^{B'}$$

$$D = T \cdot A \cdot T^{-1}$$

$$T^{-1} = T_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverses berechnen:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Test: $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$