Und falls A nicht diagonalisierbar? 12.01.16

falls $\dim \operatorname{Eig}(A,\lambda) <$ Vielf von λ in χ_A?

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(n \times n, K)$, $\lambda \in K$, $\chi_A = (\lambda - x)^n$

aber $\dim(\operatorname{Eig}(A,\lambda) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = \langle e_1 \rangle)$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Satz: Sei $A \in \operatorname{Mat}(n \times n, K)$ und χ_A zerfällt in Linearfaktoren (z.B. $K = \mathbb{C}$)

Dann gibt $T \in Gl(n,K)$ mit

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_2 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_n & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_n \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Jordanblock

Jordannormalform

⚠ - λ_i nicht notwendigerweise verschieden

- Eindeutig bis auf Umordnen der Blöcke

6. Skalarprodukt

A Motivation: Längen und Winkel

⚠ Bisher haben wir keine Längen von, oder Winkel zwischen Vektoren definiert.

Bsp.: $V = C(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$

Länge von $v_1 = e^x$ oder $v_1 = \sin(x)$? Winkel zw. v_1 & v_2?

brauchen zusätzliche Struktur: Skalarprodukt

$\overset{GA}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Eig}(A,1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

dim = 2 = Vielfachheit von 1

(Zwischenergebnis: A ist diagonalisierbar, da Bed 2) trivial für einfache Nullstellen)

EW 2:

$$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Eig}(A,2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

4. Basiswechsel zu Eigenvektoren

$B = (e_1, \dots, e_n) \leadsto B' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$A = M_B^B \qquad M_{B'}^{B'} = T_{B'}^{B} \, M_B^B \, T_B^{B'}$

$D = T \cdot A \cdot T^{-1}$

$$T^{-1} = T_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverses berechnen:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Test:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bsp.: 1) $\mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

<u>kanonisches Skalarprodukt:</u>

$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \in \mathbb{R}$

$= (x_1 \ldots x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

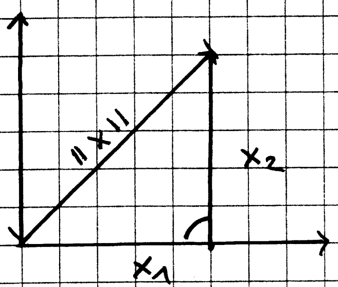
Matrix-mult.

$= x^T \cdot y$

⚠ ab jetzt ist $x \in \mathbb{R}^n$ immer ein <u>Spaltenvektor</u>

$\Rightarrow$ x^T ist zugehöriger Zeilenvektor

<u>Länge / Betrag</u> von x: $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$



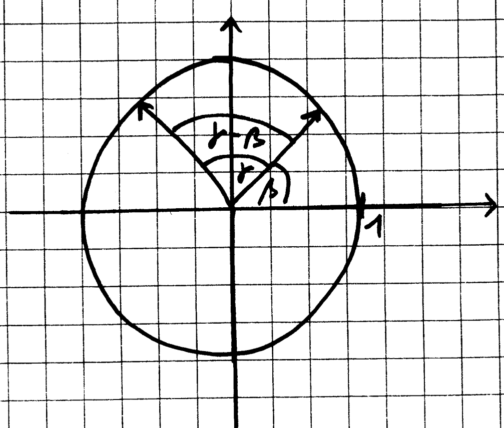
$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$

<u>Winkel</u> zw. x und y

$\langle x, y \rangle = \cos(\alpha) \|x\| \|y\|$ oder $\alpha = \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}\right)$

z.B. $\left\langle \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix} \right\rangle = \cos\beta \cdot \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma$

$\overset{\text{Add. Theorem}}{=} \cos(\gamma - \beta)$



Insbesondere:

$x \underset{\text{orthogonal}}{\perp} y \iff \alpha = 90° \iff \cos(\alpha) = 0 \iff \langle x, y \rangle = 0$

2) $\mathbb{C}^n$:

kennen bereits $z \in \mathbb{C}$, $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$\triangledown$! $\sqrt{z \cdot z}$ ergibt Unsinn, da $\sqrt{i \cdot i} = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ keine Länge

$z, w \in \mathbb{C}^n$

kanonische Skalarprodukt:

$$\langle z, w \rangle := z_1 \overline{w} + \ldots z_n \overline{w_n} \in \mathbb{C}$$
$$= z^T \cdot \overline{w}$$

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \overline{w} = \begin{pmatrix} \overline{w}_1 \\ \vdots \\ \overline{w}_n \end{pmatrix}$$

falls $z = w$: $\langle z, z \rangle = z_1 \overline{z_1} + \ldots + \underbrace{z_n \overline{z_n}}_{\in \mathbb{R}_{\geq 0}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Länge / Betrag von $z \in \mathbb{C}^n$: $\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

(B) Bilinearform (für beliebige Körper K)

Def.: Sei V ein K-VR. Eine Abbildung $s: V \times V \to V$ heißt Bilinearform falls gilt:

B) s ist linear in beiden Argumenten, d.h.

$s(v + w, n) = s(v, n) + s(w, n)$, $s(\lambda v, n) = \lambda s(v, n)$

$s(v, w + u) = s(v, w) + s(v, u)$, $s(v, \lambda n) = \lambda s(v, n)$

$\forall v, w, n \in V$, $k \in K$

Gilt ~~außerdem~~

S) $s(v, w) = s(w, v)$ $\forall v, w$ so heißt s symmetri-

Gilt

A) $s(v, w) = -s(w, v)$ $\forall v, w$, so heißt s alternieren

Bsp.: 1) $\langle\ ,\ \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ ist symm BLF

$\langle\ ,\ \rangle$ auf $\mathbb{C}^n$ nicht, da $\langle z, \lambda w\rangle = \overline{\lambda}\langle z, w\rangle$

$\underset{\text{i.A.}}{\neq} \lambda\langle z, w\rangle$

z.B. $\langle z, iw\rangle = -i\langle z w\rangle$

2) $V = \mathcal{C}([0,1]) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$

$I(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt \in \mathbb{R}$ ist symm. BLF

3) Sei $A \in Mat(n \times n, K)$ bel.

$s(x,y) = \underset{(1\times n)}{x^T}\ \underset{(n\times n)}{A}\ \underset{(n\times 1)}{y} = \sum_{i,j} x_i a_{ij} y_j$ ist BLF

$\ulcorner\ x^T A(y_1 + y_2) = x^T A y_1 + x^T A y_2 \ldots \lrcorner$, $a_{ij} = e_i^T A e_j = s(e_i, e_j)$

in 1) $A = E_n$

s alternierend $\Leftrightarrow$ A alt $\quad A = -A^T$

s sym $\Leftrightarrow$ A sym $\quad A = A^T$

Def.: Sei V K-VR mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$. Sei s eine BLF.

Wir definieren:

Gramsche Matrix $\quad G_{\mathcal{B}}(s) = (g_{ij}) \in Mat(n \times n, K)$

$g_{ij} := s(v_i, v_j)$

$G_{\mathcal{B}}(s)$ beschreibt s komplett, denn:

Satz 6.1: Sei $\phi_{\mathcal{B}}\ K^n \to V$ zug. Koord. abb. und $x = \phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)$, $y = \phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) \in K^n$. Dann gilt

$s(v,w) = x^T G_{\mathcal{B}}(s)\, y$

Beweis: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, $w = \sum_{i=1}^{n} \underset{\in k}{y_i} \underset{\in V}{v_i}$

$$s(v,w) = \sum_i x_i s(v_i, w) = \sum_i x_i \sum_j y_j \underbrace{s(v_i, v_j)}_{g_{ij}} = \sum_{i,j} x_i g_{ij} y_j$$

$$= x^T G_B(s) y$$

$\boxed{=}$

Korollar: Nach einer Basiswahl liefert

$$\{\text{BLF auf } V\} \xrightarrow{1:1} \mathrm{Mat}(n \times n, k)$$

$$s \longmapsto G_B(s)$$

s sym $\Leftrightarrow$ $G_B(s)$ sym

s alt $\Leftrightarrow$ $G_B(s)$ alt

Bsp.: $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, $B = (\overset{v_1}{1}, \overset{v_2}{x}, \overset{v_3}{x^2})$

$$G_B(I) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$I(f,g) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$$

$$g_{ij} = I(v_i, v_j) = \int_0^1 v_i(t)\, v_j(t)\, dt = \int_0^1 t^{i-1} t^{j-1} dt$$

$$= \int_0^1 t^{i+j-2}\, dt$$

Da $\int_0^1 t^n\, dt = \frac{1}{n+1}$

$$g_{23} = \int_0^1 t \cdot t^2\, dt = 1/4$$

Basiswechsel?

Satz 6.2 Seien A, B Basen auf V, s BLF.

Dann gilt

Transformationsformel für BLF $\quad G_B(s) = S^T G_A(s) S$, $S = T_A^B \in Gl(n, k)$

Beweis: Sei $v, w \in V$ mit Koordinaten

$$v = \phi_A(x) = \phi_B(\tilde{x})$$
$$w = \phi_A(y) = \phi_B(\tilde{y}) \quad \text{bzgl. } A \text{ und } B.$$

Es gilt: $x = S\tilde{x}, \quad y = S\tilde{y}$

$$x^T = \tilde{x}^T S^T$$

$$s(v,w) = \tilde{x}^T G_B(s)\tilde{y}$$
$$x^T G_A(s) y = \tilde{x}^T S^T G_A(s) S\tilde{y}$$

Die Behauptung folgt, da $\forall v, w \in V$ gilt

Bem: Wir haben mittlerweile mind. 3 Interpretationen für eine Matrix $A \in Mat(n \times n, K)$

Interpr.	Wählen	Identifikation	Transf.formel
$f: V \to W$ linear, $\dim V = \dim W$	Basen B von V, B' von W	$M^B_{B'}(f)$	$S^{-1}AT$
$f: V \to V$ Endom.	Basis B von V	$M^B_B(f)$	$S^{-1}AS$
$s: V \times V \to K$ BLF	Basis B von V	$G_B(s)$	S^TAS

⚠ Der Unterschied macht sich nur im Transformationsverhalten bemerkbar.

(C) Skalarprodukte und Sesquilinearform

$K = \mathbb{R}$

$0 \neq x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, x \rangle > 0$

$\quad x_1^2 + \dots x_n^2$

Def.: Sei V $\mathbb{R}$-VR und s sym BLF.

s heißt positiv definit oder Skalarprodukt

P) $s(x,x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

nicht Sinn für $K = \mathbb{R}$

$A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$ heißt positiv definit, falls

$x^T A x > 0 \quad \forall\, 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$

(V, s) heißt euklidischer VR

$K = \mathbb{C}$

∇ $\langle\ ,\ \rangle$ auf $\mathbb{C}^n$ ist nicht bilinear

__Def.__ Sei V $\mathbb{C}$-VR und $s: V \times V \to \mathbb{C}$

s heißt Sesquilinearform falls

$\bar{B})$ $s(v+w, n) = s(v,n) + s(w,n)$, $s(\lambda v, n) = \lambda s(v,n)$

$s(v, w+n) = s(v,w) + s(v,n)$, $s(v, \lambda n) = \bar{\lambda} s(v,n)$

H) s heißt hermetisch falls $s(v,w) = \overline{s(w,v)}$

s heißt positiv definit oder komplexes Skalarprodukt falls außerdem

P) $\underset{\in \mathbb{R} \text{ nach H)}}{s(v,v)} > 0 \quad \forall v \neq 0$ $\qquad s(v,v) = \overline{s(v,v)} \in \mathbb{R}$

(V,s) heißt unitärer VR.

__Bem.__: Ersetzen wir $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$, so wird aus

$\bar{B}), H), P) \underset{\mathbb{R}}{\rightsquigarrow} B), S), P)$

Aus Aussagen für V unitär folgen Aussagen für V euklidisch

__Satz 6.3.__

Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ euklidisch o. unitär

Dann ist $\|\ \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$v \mapsto \|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ eine Norm, d.h.

N1) $\|v\| = 0 \iff v = 0$

N2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

N3) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ Dreiecksungl.

EW 2:

$$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Eig(A,2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

4. <u>Basiswechsel zu Eigenvektoren:</u>

$$B = (e_1, \dots, e_n) \longrightarrow B' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$A = M_B^B \qquad M_{B'}^{B'} = T_{B'}^{B} \, M_B^B \, T_B^{B'}$$

$$D = T \; A \; T^{-1}$$

$$T^{-1} = T_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverses berechnen:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Test: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}$

12.01.2016

Und falls A nicht diagonalisierbar?

falls $\dim \mathrm{Eig}(A,\lambda) <$ Vielfachheit von λ in χ_A?

Bsp: $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \underset{\in \mathbb{R}}{\lambda} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$, $\chi_A = (\lambda - x)^n$

aber $\dim \mathrm{Eig}(A,\lambda) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = \langle e_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Satz: Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ und χ_A zerfällt in Linearfaktoren. (z.B. $K = \mathbb{C}$). Dann gibt $T \in Gl(n, K)$ mit

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{array}{|ccc|} \lambda_1 & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_1 \\ \hline \end{array} & 0 & & & 0 \\ 0 & \begin{array}{|ccc|} \lambda_2 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_2 \\ \hline \end{array} & 0 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{} & 0 \\ 0 & & & 0 & \underbrace{\begin{array}{|ccc|} \lambda_n & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_n \\ \hline \end{array}}_{\text{Jordanblock}} \end{pmatrix}$$

Jordannormalform

⚠ - λ_i nicht notwendigerweise verschieden
- Eindeutig bis auf Umordnen der Blöcke

6. Skalarprodukt

(A) Motivation: Längen & Winkel

⚠ Bisher haben wir keine Längen von, oder Winkel zwischen Vektoren definiert.

Bsp: $V = C(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

Länge von $v_1 = e^x$ oder $v_1 = \sin(x)$? Winkel zw. v_1 und v_2?

brauchen zusätzliche Struktur: Skalarprodukt

Bsp 1) $\mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

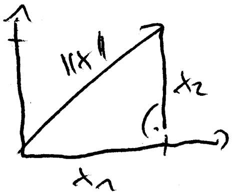
Kanonisches Skalarprodukt:

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \in \mathbb{R}$$

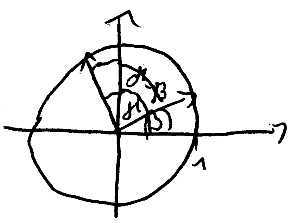
$$= \underbrace{(x_1, \ldots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\text{Matrixmult.}} = x^T \cdot y$$

⚠ ab jetzt ist $x \in \mathbb{R}^n$ immer ein Spaltenvektor
$\Rightarrow x^T$ ist zugehöriger Zeilenvektor

Länge / Betrag von x: $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$



$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$$



Winkel zw. x & y:
$\langle x, y \rangle = \cos(\alpha) \|x\| \, \|y\|$ oder $\alpha = \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}\right)$

z.B. $\left\langle \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix} \right\rangle = \cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma$

$\overset{\text{Add.theorem}}{=} \cos(\gamma - \beta)$

Insbesondere $x \perp y \Leftrightarrow \alpha = 90° \Leftrightarrow \cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$

2) $\mathbb{C}^n$

Kennen bereits: $z \in \mathbb{C}$, $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$! $\sqrt{z \cdot z}$ ergibt Unsinn da $\sqrt{i \cdot i} = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ keine Länge

$z, w \in \mathbb{C}^n$

kanonisches Skalarprodukt: $\langle z, w \rangle := z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n \in \mathbb{C}$
$= z^T \cdot \bar{w}$

falls $z = w$ $\langle z, z \rangle = \underbrace{z_1 \bar{z}_1}_{\in \mathbb{R}_{\geq 0}} + \dots + \underbrace{z_n \bar{z}_n}_{\in \mathbb{R}_{\geq 0}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Länge / Betrag von $z \in \mathbb{C}^n$ $\|z\| := \sqrt{\langle z, z \rangle} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

(B) Bilinearform (für beliebige Körper K)

Def: Sei V ein K-VR. Eine Abb $s: V \times V \to K$ heißt Bilinearform falls gilt:

B) s ist linear in beiden Argumenten, d.h.

$s(v+w, u) = s(v, u) + s(w, u)$, $s(\lambda v, u) = \lambda s(v, u)$

$s(v, w+u) = s(v, w) + s(v, u)$, $s(v, \lambda u) = \lambda s(v, u)$

$\forall v, w, u \in V, \lambda \in K$

Gilt außerdem.

S) $s(v, w) = s(w, v)$ $\forall v, w$ so heißt s symmetrisch

Gilt A) $s(v, w) = -s(w, v)$ $\forall v, w$ so heißt s alternierend

Bsp: 1) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ ist symm BLF ✓
$\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{C}^n$ nicht, da $\langle z, \lambda w \rangle = \bar{\lambda} \langle z, w \rangle \underset{\text{i.A.}}{\neq} \lambda \langle z, w \rangle$

2) $V = C([0,1]) = \{ f: [0,1] \to \mathbb{R} \text{ stetig} \}$
$I(f,g) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt \in \mathbb{R}$ ist symm. BLF.

3) Sei $A \in Mat(n \times n, K)$ bel.
$s(x,y) = x^T A y = \sum_{i,j} x_i a_{ij} y_j$ ist BLF

$[\, x^T A (y_1 + y_2) = x^T A y_1 + x^T A y_2 \dots$ ✓
$(n=1)$ $A = E_n$.

s alternierend $\Leftrightarrow$ A alt $\quad A = -A^T$
s symm $\Leftrightarrow$ A symm $\quad A = A^T$

Def: Sei V K-VR mit Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ Sei s eine BLF.
Wir definieren
Gram'sche Matrix $\quad G_B(s) = (g_{ij}) \in Mat(n \times n, K)$
$$g_{ij} := s(v_i, v_j)$$

$G_B(s)$ beschreibt s komplett, denn

Satz 6.1 Sei $\Phi_B: K^n \to V$ zugeh. Koordinatenabb. zur Basis B
und $x = \Phi_B^{-1}(v)$, $y = \Phi_B^{-1}(w) \in K^n$. Dann gilt
$$\boxed{s(v,w) = x^T G_B(s)\, y}$$

Bew: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$, $w = \sum_{j=1}^n y_j v_j$

$$s(v,w) \underset{\substack{\text{d. 1}\\ \text{Argu.}}}{\overset{\text{lin}}{=}} \sum_i x_i\, s(v_i,w) \underset{\substack{\text{2nd.}\\ \text{Arg.}}}{\overset{\text{lin}}{=}} \sum_i x_i \sum_j y_j \underbrace{s(v_i,v_j)}_{g_{ij}} = \sum_{i,j} x_i\, g_{ij}\, y_j$$

$$= x^T G_B(s)\, y$$

$\square$

Korollar: Nach einer <u>Basiswahl</u>, ~~…~~ liefert

$$\{ \text{BLF auf } V \} \xrightarrow{1:1} \mathrm{Mat}(n\times n, K)$$
$$s \longmapsto G_B(s)$$

s symm $\Leftrightarrow G_B(s)$ sym

s alt $\Leftrightarrow G_B(s)$ alt

<u>Bsp:</u> $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, $B = (\overset{v_1}{1}, \overset{v_2}{x}, \overset{v_3}{t^2})$

$$G_B(I) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Erklärung: $I(f,g) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$

um g_{ij} zu erhalten: $g_{ij} = I(v_i, v_j) = \int_0^1 v_i(t)\, v_j(t)\, dt$

$$= \int_0^1 t^{i-1} \cdot t^{j-1}\, dt = \int_0^1 t^{i+j-2}\, dt$$

Da $\int_0^1 t^n\, dt = \frac{1}{n+1}$

z.B.: $g_{23} = \int_0^1 t \cdot t^2 \cdot dt = \frac{1}{4}$

Basiswechsel?

Satz 6.2 Seien A, B Basen auf V, s BLF. Dann gilt

<u>Transformationsformel für BLF</u> $\quad G_B(s) = S^T G_A(s)\, S, \quad S = T_A^B \in GL(n,K)$

Bew: Sei $v, w \in V$ und Koordinaten ~~…~~ bzgl A & B

$v = \Phi_A(x) = \Phi_B(\tilde{x})$

$w = \Phi_A(y) = \Phi_B(\tilde{y})$

Es gilt: $x = S\tilde{x}$, $y = S\tilde{y}$

$x^T = \tilde{x}^T \cdot S^T$

$s(v,w) = \tilde{x}^T G_B(s)\, \tilde{y}$

$x^T G_A(s) y = \tilde{x}^T S^T G_A(s)\, S\tilde{y}$

Die Beh. folgt, da $\forall v,w \in V$ gilt

Bem.:
Wir haben mittlerweile 3 Interpretationen für eine Matrix $A \in Mat(n\times n, K)$

Interpretation	Wahlen	Identifikation	Transformationsformel
$f: V \to W$ linear, $\dim V = \dim W$	Basen B in V, B' in W	$M^B_{B'}(f)$	$S^{-1}AT$
$f: V \to V$ Endom.	Basis B in V	$M^B_B(f)$	$S^{-1}AS$
$s: V\times V \to K$ BLF	Basis B von V	$G_B(s)$	S^TAS

(!) Der Unterschied macht sich nur im Transformationsverhalten bemerkbar.

(C) Skalarprodukte und Sesquilinearformen

$K = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, x \rangle > 0$

<u>Def:</u> Sei V $\mathbb{R}$-VR und s sym. BLF

s heißt <u>positiv definit</u> oder <u>Skalarprodukt</u>

P) $s(x,x) \boxed{> 0}$ $\forall x \neq 0$

macht Sinn für $K = \mathbb{R}$

$A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ heißt <u>positiv definit</u>, falls
$x^T A x > 0$ $\forall 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$

(V, s) heißt <u>euklidischer VR</u>

$K = \mathbb{C}$

$\nabla \langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{C}^n$ ist nicht linear

<u>Def:</u> Sei V $\mathbb{C}$-VR und $s: V \times V \to \mathbb{C}$

s heißt Sesquilinearform, falls

B) $s(v+w, u) = s(v,u) + s(w,u)$, $s(\lambda v, u) = \lambda s(v,u)$
$s(v, w+u) = s(v,w) + s(v,u)$, $s(v, \lambda w) = \bar{\lambda} s(v,u)$

H) s heißt <u>hermetisch</u> falls $s(v,w) = \overline{s(w,v)}$

s heißt <u>positiv definit</u> oder komplexes Skalarprodukt falls außerdem

P) $\underbrace{s(v,v)}_{\in \mathbb{R} \text{ nach } (H)} > 0$ $\forall v \neq 0$ $\quad s(v,v) = \overline{s(v,v)} \in \mathbb{R}$

(V, s) heißt unitärer VR

<u>Bem:</u> Ersetzen wir $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$, so wird aus

B), H), P) $\xrightarrow[\mathbb{R}]{}$ B), S), P).

Aus Aussage für V unitär folgt Aussage für V euklidisch

Satz 6.3

Sei $(V, \langle , \rangle)$ euklidisch oder unitär

Dann ist $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

$v \longmapsto \|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$

eine Norm, d.h.

N1) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

N2) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

N3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ Dreiecksungl.