Satz 6.3

Sei $(V, \langle , \rangle)$ euklidisch oder unitär

Dann ist $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$v \mapsto \|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

eine Norm, d.h.

N1) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

N2) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

N3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ Dreiecksungl.

19.01.2016

Skalarprodukt $s$

über $\mathbb{R}$: bilinear, symmetrisch, pos. definit — euklidisch

über $\mathbb{C}$: sesquilinear, hermitesch, pos. definit — unitär

$s(\lambda v, w) = \lambda s(v,w)$ $\qquad s(v,w) = \overline{s(w,v)}$ $\qquad s(v,v) > 0 \ \forall v \neq 0$

$s(v, \lambda w) = \bar{\lambda} s(v,w)$

Satz 6.3.
Sei $(V, \langle\,\rangle)$ euklidisch / unitär. Dann ist $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $v \mapsto \sqrt{s(v,v)}$
eine Norm, d.h.

N1) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

N2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

N3) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Beweis:

N1) folgt aus P)

N2) $\langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle v, v\rangle = |\lambda|^2 \langle v, v\rangle$

N3) folgt aus

Satz 6.4 Ungleichung von Cauchy-Schwartz
V euklidisch / unitär. Dann gilt:

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| \quad \forall v, w$$

und Gleichheit gilt gdw $v, w$ linear abh. sind

Beweis: $v = 0$ oder $w = 0$ $\rightsquigarrow$ klar

OBdA $v \neq 0 \neq w$

für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$0 \leq \langle v + \lambda w, v + \lambda w\rangle = \langle v, v\rangle + \lambda\langle w, v\rangle + \bar{\lambda}\langle v, w\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle w, w\rangle$$

da positiv definit

bilinear / sesquilin

$$\lambda := \frac{-\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle \neq 0}$$

$$\to 0 \leq \langle v, v\rangle - \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\langle w, w\rangle} \quad \| \cdot \langle w, w\rangle$$

$0 \le \langle v,v\rangle \langle w,w\rangle - |\langle v,w\rangle|^2$

$|\langle v,w\rangle|^2 \le \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$ alles positiv → Wurzeln ziehen

$\Rightarrow |\langle v,w\rangle| \le \|v\| \cdot \|w\|$

Falls Gleichheit folgt: $0 = \langle v+\lambda w, v+\lambda w\rangle = \|v+\lambda w\|^2$

$\overset{N1}{\Rightarrow} v+\lambda w = 0 \rightarrow v,w$ lin. abh.

Def.: $V$ euklidisch/unitär $v,w \in V$ heißen orthogonal zueinander, $(v \perp w)$, falls $\langle v,w\rangle = 0$

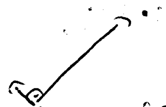
$M \subset V$ Menge

$M^\perp := \{ v \in V \mid v \perp w \ \forall w \in M \}$ orthogonales Komplement

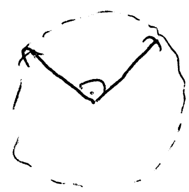
Eine Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ von $V$ heißt Orthogonalbasis, falls

$v_i \perp v_j \quad \forall i \neq j$

$B$ heißt Orthonormalbasis falls außerdem $\|v_i\| = 1$ für alle $i$



Orthogonal Basis von $\mathbb{R}^2$



Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$

Bemerkung:

a) $M^\perp \subset V$ ist UVR

b) $M^\perp = \langle M \rangle^\perp$

c) $v_1 \dots v_n \longrightarrow \lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n$ mit $\lambda_i = 1 / \|v_i\|$

macht aus einer OGB eine ONB

Lemma 6.5: Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine ONB von $V$

Dann gilt für alle $v \in V$ $\quad v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i$

Beweis: Sei $v = \sum \lambda_i v_i$

$\langle v, v_j \rangle = \sum \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle = \langle v_j, v_j \rangle = 1$

Satz 6.6 (Gram-Schmidt ON-Verfahren)

V euklidisch / unitär, dim $V < \infty$

$U \subset V$ Unterraum

Dann lässt sich jede ONB von U zu einer ONB von V ergänzen.

Insbesondere besitzt V eine ONB $(U = \{0\})$

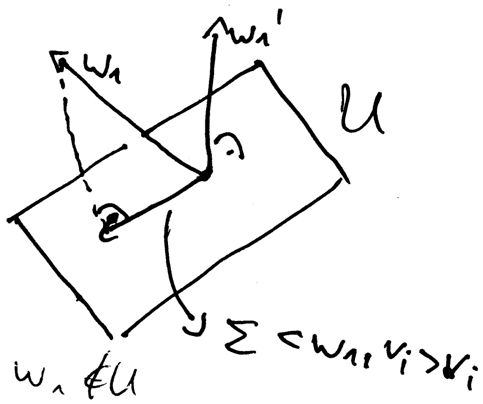
<u>Beweis:</u> Induktion über dim V - dim U = m

IA: m = 0 klar

IS: $m-1 \to m$ sei $(v_1, \dots, v_r)$ ONB von U

Ergänze durch $(w_1, \dots, w_m)$ zu Basis von V.

Betrachte $w_1' = w_1 - \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \langle w_1, v_i \rangle v_i}_{\text{orthogonale Projektion von } w_1 \text{ auf } U}$




Setze $\tilde{w}_1 = \frac{w_1'}{\|w_1'\|}$

Beachte:

$\|w_1'\| \neq 0$, da $w_1' \neq 0$, da $w_1 \notin U$

---

Es gilt: $\langle \tilde{w}_1, v_j \rangle = \frac{1}{\|w_1'\|} \langle w_1', v_j \rangle = \frac{1}{\|w_1'\|} \left( \langle w_1, v_j \rangle - \sum_{i=1}^{r} \langle w_1, v_i \rangle \langle v_i, v_j \rangle \right)$

$= \frac{1}{\|w_1'\|} \left( \langle w_1, v_j \rangle - \langle w_1, v_j \rangle \cdot 1 \right) = 0$

$\Rightarrow v_1, \dots, v_r, \tilde{w}_1$ ist ONB für $U_1 = \langle U \cup \{w_1\} \rangle$

Da $U \subsetneq U_1$ folgt dim U < dim $U_1$ & dim V - dim $U_1$ < m

Benutze IV für $U_1 \subset V$

---

<u>Beispiel:</u> Beweis ist konstruktiv

Gegeben: $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ Basis von $\mathbb{R}^3$ $(U = \{0\})$

Ziel: Wollen $\mathcal{B}$ in ONB transformieren wollen.

Rechentrick: Erst orthogonalisieren, am Schluss normalisieren.

$\rightsquigarrow$ Verwende Koeffizienten

$\frac{\langle w_i, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$ statt $\langle w_i v_i \rangle$

$$w_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\langle (1,1,1), (1,0,1) \rangle}{\langle (1,0,1), (1,0,1) \rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{\langle (0,0,4), (1,0,1) \rangle}{\langle (1,0,1), (1,0,1) \rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\langle (0,0,4)(0,1,0) \rangle}{\langle (0,1,0), (0,1,0) \rangle} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{4}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$(w_1', w_2', w_3')$ ist OGB von $\mathbb{R}^3$

$$\tilde{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)$ ist ONB von $\mathbb{R}^3$

Korollar 6.7 (wie in 6.6)

$U \subset V$ UVR

Dann gilt: a) $U \oplus U^\perp = V$

b) $(U^\perp)^\perp = U$

Beweis: Wähle ONB $v_1, \dots, v_r$ von $U$. Ergänze durch $v_{r+1}, \dots, v_n$ zu ONB von $V$. Betrachte $W = \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle \subset V$ (also $U \oplus W = V$)

noch zu zeigen: $W = U^\perp$   $W \subset U^\perp$ klar

Sei $v = \sum \lambda_i v_i \in U^\perp \Rightarrow \lambda_i = \langle v, v_i \rangle = 0$ für $i = 1, \dots, r$

$\Rightarrow v \in W$

$\Rightarrow U^\perp \subset W$

## (V)[+] Orthogonale / Unitäre Endomorph.

Welche $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ erhält die Geometrie $\hat{=}$ Länge / Winkel
$\hat{=}$ Skalarprodukt.

**Def:** Veuklidisch / unitär

Der Endomorphismus $f: V \to V$ heißt <u>orthogonal</u> bzw. unitär, falls $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in V$

**Bem:** Es folgt: a) $\|f(v)\| = \|v\|$

b) $v \perp w \Rightarrow f(v) \perp f(w)$

c) $f$ ist injektiv.
Falls $\dim V < \infty$, dann ist $f$ bijektiv.

d) Ist $f$ bijektiv, so ist $f^{-1}$ ebenfalls orthogonal / unitär

e) $g: V \to V$ orthogonal / unitär
$\Rightarrow g \circ f$ ist orthogonal / unitär