1 22.01.16

V euklidisch / unitär

$f: V \to V$ orthogonal / unitär

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w$$

In Koordinaten?

Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ ONB von V

$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = A$

$v = \sum x_i v_i \,, \quad w = \sum y_i v_i$

(*) $\langle f(v), f(w) \rangle = (Ax)^T (\overline{Ay}) = x^T A^T \overline{A} y$

$\langle v, w \rangle = x^T \overline{y} = x^T E_n y \overset{!}{=}$

$\Rightarrow A^T \overline{A} = E_n$

<u>Def.</u>: $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ heißt orthogonal, falls $A^T = A^{-1}$. $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ heißt unitär falls $\overline{A}^T = A^{-1}$

<u>Kor. 6.8.</u>

a) Äquivalent sind:

1) A orthogonal / unitär
2) Spalten von A bilden ONB
3) Zeilen von A bilden ONB

b) Sei $\mathcal{B}$ ONB

f orthogonal / unitär $\Leftrightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ orth. / unitär

c) Sei λ ein EW A, A orth. / unitär

Dann gilt $|\lambda| = 1$

<u>Beweis</u>:

a) $\underset{\substack{\Updownarrow \\ 1)}}{\overline{A}^T \cdot A = E_n} \Leftrightarrow \underset{\substack{\Updownarrow \\ 2)}}{A^T \overline{A} = E_n} \qquad \underset{\substack{\Updownarrow \\ 3)}}{A \overline{A}^T = E_n}$

b) folgt aus (*)

c) Sei v EV von A mit EW λ

$$\underset{\|v\|}{\underset{\shortparallel}{\|Av\|}} = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \rightarrow |\lambda| = 1$$

für $\mathbb{R}$: $\lambda = \pm 1$

für $\mathbb{C}$: $\lambda = \cos\alpha + i\sin\alpha \quad \alpha \in [0, 2\pi]$

<u>Bem.:</u> Seien A, B ONB von B

Dann gilt: T_B^A ist orthog./unitär

(da $T_B^A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ist unitär)

<u>Matrixgruppe</u>

A, B orthogonal / unitär

$\Rightarrow$ $A \cdot B$, A^{-1} ebenfalls orth. / unitär

$$\overline{AB}^T \cdot AB = \overline{B}^T \underbrace{\overline{A}^T AB}_{E_n} = \overline{B}^T B = E_n$$

~~$O(n) = \{A \mid A$ orthogonal$\} \subset GL(n, \mathbb{R})$~~

~~orthogonale Gruppe~~

Spezielle orth. Gruppe

$$SO(n) = \{A \mid A \text{ orth. } \det(A) = 1\} \subset SL(n, \mathbb{R}) \overset{\{A \mid \det(A) = 1\}}{\shortparallel}$$

$\cap \qquad \cap$

$O(n) = \{A \mid A$ orthogonal$\} \subset GL(n, \mathbb{R})$

orthogonale Gruppe

spezielle unitäre Gruppe

$SU(n) = \{A$ unitär $\det(A) = 1\} \subset SL(n, \mathbb{C})$

$\cap \qquad \cap$

$U(n) = \{A \mid A$ unitär$\} \subset GL(n, \mathbb{C})$

unitäre Gruppe

$A \in O(n) \Rightarrow |\det(A)| = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$

$A \in U(n) \nearrow \qquad \searrow \det(A) = \cos\alpha + i\sin\alpha$

$(\det(A^{-1}) = \det(\bar{A}^{-1})$

$= \overline{\det(A)})$

$\det(A^{-1})\det(A) = 1$

Bsp.:

a) $n = 1 \qquad SO(1) = \{ Id \}, \; O(1) = \{ Id, -Id \}$

b) $n = 2 \qquad SO(2) = \{ \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{A_\alpha^+} \mid \alpha \in [0, 2\pi] \}$

Drehung um Winkel α

$O(2) = \{ \text{Drehungen}, \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}}_{A_\alpha^-}, \alpha \in [0, 2\pi) \}$

Spiegelungen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a^2 + c^2 = 1$

$b^2 + d^2 = 1$

$ab + cd = 0$

c) $n = 3 \qquad A \in O(3)$

$\chi_A \in \mathbb{R}[x]$ hat Grad 3

$\xRightarrow{\text{ZWS}} \chi_A$ hat mind. eine reelle NS

Da A orthogonal, EW $\lambda = \pm 1$

Wähle EV v mit $\|v\| = 1$ und ergänze zu ONB

$\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$

Basiswechsel : $S^T A S = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$A_\alpha^\pm$}} \\ 0 & & \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A$ ist Kombination aus evtl. Spiegelung (an Ebene $\subset \mathbb{R}^3$) und einer Drehung (um eine Achse)

Satz 6.9. V unitär, $\dim V < \infty$

$f: V \to V$ unitär

Dann ex. ONB aus EV von f. Insbesondere ist f diagonalisierbar.

Korollar 6.10 Sei $A \in U(n)$. Dann existiert $S \in U(n)$

mit $S^T A \bar{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $|\lambda_i| = 1$

Beweis 6.9: Induktion über $n = \dim V$

IA: $n = 1$ klar

IS: $n-1 \to n$

FdA: Fundamentalsatz d. Algebra

Nach FdA (4.10) zerfällt χ_f über $\mathbb{C}$,

$\chi_f = (x - \lambda_n) \dots (x - \lambda_n) \in \mathbb{C}[x]$

Nach 4.8 gilt $|\lambda_i| = 1$

Sei v Eigenvektor zu λ_1

Betrachte $U = \{v\}^\perp \subset V$, $\dim U = n-1$

Wir zeigen: $f(U) \subset U$ (*)

Dann ist $f|_U : U \to U$ ebenfalls unitär

IV liefert ONB von U aus EV von f.

Ergänzen um v liefert die gewünschte ONB.

Beweis (*):

Sei $w \in U$

$\langle f(w), v \rangle = \frac{1}{\lambda_1} \langle f(w), \underbrace{f(v)}_{= \lambda_1 v} \rangle = \frac{1}{\lambda_1} \langle w, v \rangle = 0$

$\Rightarrow f(w) \in U$

Variante über $\mathbb{R}$?

Satz 6.11 V euklidisch, $\dim V < \infty$

$f: V \to V$ orthogonal

Dann ex. ONB von V mit

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} +1 & & \\ & \ddots & \\ & & +1 \end{matrix}} & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}} & & & \\ & & \boxed{A_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

mit $A_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix} \in SO(2)$

mit $\alpha_i \in [0, 2\pi]$ $\alpha_i \neq 0, \pi$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

In Worten:

f lässt sich zerlegen in

1) Id

2) Reflektionen

3) Drehungen von Ebenen

Beweis: Idee: wir „komplexifizieren" f.

Wähle ONB A und setze $M_A^A(f) = A$

$A \in O(n) \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$

FdA (4.10): $\chi_f = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_r)(x - \mu_1)(x - \overline{\mu_1}) \ldots (x - \mu_k)(x - \overline{\mu_k})$

$\lambda_i \in \mathbb{R}$ $\mu_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

(da $f(\mu_i) = 0$

$f(\overline{\mu_i}) = \overline{f(\mu_i)} = 0$)

Induktion über $n = \dim V$

IS: Für $\lambda_i \in \mathbb{R}$ genau wie in 6.9.

Da $\lambda_i = \pm 1$, liefert uns das $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} +1 & & \\ & \ddots & \\ & & +1 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$

Jetzt wähle μ_1:

Sei $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A zu μ_1.

$v = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}^n$

$\bar{v} = x - iy$

$A\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\mu_1 v} = \bar{\mu}_1 \bar{v}$

$\Rightarrow$ $\bar{v}$ ist EV zu EW $\bar{\mu}_1$

Notation: Span $\langle \ldots \rangle$
Skalarpr. $\langle \ , \ \rangle$

Betrachte Span $\langle v, \bar{v} \rangle \subseteq \mathbb{C}^n$

$$\langle v, \bar{v} \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$$
$$\parallel$$
$$W = \langle x, y \rangle$$

W ist 2-dim reeller UVR von $\mathbb{R}^n$

$A(\langle v, \bar{v} \rangle) = \langle v, \bar{v} \rangle \Rightarrow A(W) = W$

und $A|_W$ wieder orthogonal

Bspb) $\Rightarrow$ existieren ONB von W mit $A|_W = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

(A_{α} & $\alpha = 0, \pi$ kann nicht auftreten, da EW von $A|_W$ nicht reell)

$U = W^{\perp}$

wie in 6.9 benutzen IV für $A|_U$ $\dim U = n-2$

22.01.2016

① V euklidisch / unitär

$f: V \to V$ <u>orthogonal</u> / <u>unitär</u>

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w$$

In Koordinaten?

sei $\mathcal{B}$ ONB von V

$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = A \qquad v = \sum x_i v_i \quad , \quad w = \sum y_i v_i$

$$\langle f(v), f(w) \rangle = (Ax)^T (\overline{Ay}) = x^T A^T \overline{A} \overline{y}$$

$$\langle v, w \rangle = x^T \overline{y} = x^T \cdot \mathbb{1}_n \overline{y}$$

$$\Rightarrow A^T \cdot \overline{A} = \mathbb{1}_n$$

<u>Definition</u>: $A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$ heißt <u>orthogonal</u>, falls $A^T = A^{-1}$

$A \in Mat(n \times n, \mathbb{C})$ heißt <u>unitär</u>, falls $\overline{A}^T = A^{-1}$

<u>Korollar 6.8</u>

a) Äquivalent sind

1) A orthogonal/unitär
2) Spalten von A bilden ONB (bzgl. Standardskalarprod.) in $\mathbb{C}^n$
3) Zeilen von A bilden ONB (bzgl. " auf $\mathbb{C}^n$

b) Sei B ONB

f orthogonal/unitär $\Leftrightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ orth. / unitär.

c) Sei λ ein EW von A, A orth./unit. Dann gilt

$|\lambda| = 1$

<u>Beweis</u>:

a) $\underbrace{\overline{A}^T \cdot A = \mathbb{1}_n}_{\hat{=} 1)} \xrightarrow[\text{gieren}]{\text{Konju-}} \underbrace{A^T \cdot \overline{A} = \mathbb{1}_n}_{\hat{=} 2)} \qquad \underbrace{A\overline{A}^T = \mathbb{1}_n}_{\hat{=} 3)}$

b) folgt aus (*)

c) Sei v EV von A mit EW λ

$\| Av \| = |\lambda| \cdot \|v\| \xrightarrow[\text{falls } \mathbb{R}: \lambda = \pm 1]{} |\lambda| = 1$

Bemerkung Seien A, B ONB von V. Dann gilt:

T_B^A ist orthogonal/unitär.

(da $T_B^A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ist unitär)

Matrixgruppe

A, B orthogonal/unitär $\Rightarrow$ AB, A^{-1} ebenfalls orthog/unitär

$$\overline{AB}^T \cdot AB = \overline{B}^T \cdot \overline{A}^T \cdot A B = \overline{B}^T B = \mathbb{1}_n$$

wollen zeigen: $\overline{AB}^T$ ist inverse zu AB

$\Rightarrow$ können Gruppen bilden.

$O(n) = \{A \mid A \text{ orthogonal}\} \subset Gl(n, \mathbb{R})$ orthogonale Gruppe

$SO(n) = \{A \mid {A \text{ ortho} \atop \det(A) = 1}\} \in SL(n, \mathbb{R})$ spezielle orthogonale Gruppe

$\{A \mid \det A = 1\} = SL(n, \mathbb{R})$

$SL(n, \mathbb{R}) \subset Gl(n, \mathbb{R})$

$SU(n) = \{A \mid {A \text{ unitär} \atop \det(A) = 1}\} \subset SL(n, \mathbb{C})$ spezielle unitäre Grp

$U(n) = \{A \mid A \text{ unitär}\} \subset Gl(n, \mathbb{C})$ unitäre Grp

$SO \subset O$; $SU \subset U$

$A \in O(n) \Rightarrow |\det(A)| = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$

$A \in U(n) \Rightarrow |\det(A)| = 1$, $\det(A) = \cos\alpha + i \sin\alpha$

$$\left(\begin{aligned} \det(A^{-1}) &= \det(\overline{A}^{-1}) \\ &= \overline{\det(A)} \\ \det(A^{-1}) \cdot \det(A) &= 1 \end{aligned} \right)$$

Bsp: a) $n = 1$ $\quad SO(1) = \{\mathrm{id}\}$, $\quad O(1) = \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$

b) $n = 2$ $\quad SO(2) = \{\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{=: A_\alpha^+} \mid \alpha \in [0, 2\pi[\,\}$ Drehung um Winkel α

$O(2) = \{\text{Drehungen}, \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}}_{=: A_\alpha^-}, \alpha \in [0, 2\pi[\,\}$ Spiegelungen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a^2 + c^2 &= 1 \\ b^2 + d^2 &= 1 \\ ab + cd &= 0 \end{aligned}$$

c) $n = 3$ $\quad A \in O(3)$

$\chi_A \in \mathbb{R}[x]$ hat Grad 3

$\underline{\text{ZWS}} \Rightarrow \chi_A$ hat mindestens eine reelle Nullstelle

Da A orthogonal, EW $\lambda = \pm 1$

Wähle EV v mit $\|v\| = 1$ und ergänze zu ONB

B von $\mathbb{R}^3$. Basiswechsel $\quad S^T A S = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{A_\alpha^\pm} & \\ 0 & & \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ A ist Kombination aus evtl. Spiegelung (an Ebene $\subset \mathbb{R}^2$)

und einer Drehung (um eine Achse) §

Satz 6.9. V unitär, $\dim V < \infty$.

$f: V \to V$ unitär.

Dann ex. ONB aus EV von f. Insbesondere ist f

diagonalisierbar

Korollar 6.10: Sei $A \in U(n)$ Dann ex $S \in U(n)$ mit

$$S^T A \bar{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad |\lambda_i| = 1$$

Beweis 6.9: Induktion über $n = \dim(V)$

IA: $n = 1$ klar

IS: $n-1 \to n$.

Nach $\boxed{\text{FdA (4.10)}}$ zerfällt χ_f über $\mathbb{C}$,

$$\chi_f = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_n) \in \mathbb{C}[x]$$

Nach 4.8 gilt $|\lambda_i| = 1$

Sei v Eigenvektor zu λ_1

Betrachte $U = \{v\}^\perp \subset V$, $\dim U = n-1$

Wir zeigen: $f(U) \subset U$ $(\ast)$ $\qquad$ Dann ist $f|_U : U \to U$

ebenfalls unitär $\qquad$ IV liefert ONB von U aus EV von f

Ergänzen um v liefert die gewünschte ONB.

Beweis (*).

Sei $w \in U$. $\quad \langle f(w), v \rangle = \lambda_1 \langle f(w), f(v) \rangle = \frac{1}{\overline{\lambda_1}} \langle w, v \rangle = 0$

$\Rightarrow f(w) \in U$

Variante über $\mathbb{R}$?

Satz 6.11: V euklidisch, $\dim V < \infty$, $f: V \to V$ orthogonal

Dann ex. ONB von V mit

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} +1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & +1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & \boxed{A_1} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

mit $A_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix} \in SO(2)$ mit $\alpha_i \in [0, 2\pi[$; $\alpha_i \neq 0, \pi$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

In Worten:

f lässt sich zerlegen

1) Id
2) Reflexion
3) Drehungen von Ebenen

Beweis: Idee: Wir „komplexifizieren" f

Wähle ONB A und setze $M_A^A(f) = A$

$A \in O(n) \subset \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$

FdA (#10) $\quad \chi_f = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_r)(x - \mu_1)(x - \overline{\mu_1}) \cdots (x - \mu_k)(x - \overline{\mu_k})$

$\lambda_i \in \mathbb{R}$ $\qquad \mu_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$\left(\begin{array}{l} \text{da } f(\mu_i) = 0 \\ f(\overline{\mu_i}) = \overline{f(\mu_i)} = 0 \end{array} \right)$

Induktion über $n = \dim V$

IS: Für $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ~~...~~ genau wie in 6.9. Da $\lambda_i = \pm 1$, liefert uns

dass
$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} +1 & & \\ & \ddots & \\ & & +1 \end{matrix} & \\ \hline & \boxed{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}} \end{array}\right)$$

$\langle\ \rangle$ $<\ >$

Jetzt wähle μ_1

Sei $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A zu μ_1

$v = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}^n$

$\bar{v} = x - iy$

$A\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\mu_1 v} = \bar{\mu}_1 \bar{v}$ $\Rightarrow$ $\bar{v}$ ist EV zum EW $\overline{\mu_1}$

Notation: Span ~~...~~ $\langle \dots \rangle$

Skalarprod $< \cdot, \cdot >$

Betrachte Span $<v, \bar{v}> \subseteq \mathbb{C}^n$

$<v, \bar{v}> \cap \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n$

$W = <x, y>$

W ist 2-dim reeller UVR von $\mathbb{R}^n$

$A(<v, \bar{v}>) \Rightarrow A(W) \subseteq W$

und $A|_W$ wieder orthogonale Abb.

$\Rightarrow$ ex. ONB von W mit

$$A|_W = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

(A_α ~~...~~ mit $\alpha = 0, \pi$ kann nicht auftreten, da EW von $A|_W$ nicht reell)

$U = W^\perp$

wie in 6.9 benutzen IV für $A|_U$ $\dim U = n - 2$