26.01.16

(E) Hauptachsentransformation

Erinnerung: $A \in Mat(n\times n, \mathbb{R})$ symm. $\Leftrightarrow A^T = A \overset{\wedge}{=} s(x,y) = s(y,x)$

$\mathbb{C}$ hermitsch $\Leftrightarrow \bar{A}^T = A \overset{\wedge}{=} s(x,y) = \overline{s(y,x)}$

Satz 6.12 (HAT)

1) Sei $A \in Mat(n\times n, \mathbb{R})$ symm. Dann ex $S \in O(n)$ mit $S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

2) Sei $A \in Mat(n\times n, \mathbb{C})$ herm. Dann ex $S \in U(n)$ mit $S^{-1}AS = \bar{S}^TAS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $\overset{!}{\nabla}$

Lemma 6.13

A herm. $\lambda \in \mathbb{C}$ EW

Dann gilt $\lambda \in \mathbb{R}$, "Alle EW sind reell"

Bew.: Sei v EV zu λ

$$\lambda \|v\|^2 = \lambda(v^T\bar{v}) = (\lambda v)^T\bar{v} = (Av)^T \cdot \bar{v} = v^TA^T\bar{v}$$
$$= v^T\overline{Av} = v^T\overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\|v\|^2$$

Da $\|v\|^2 > 0$, $\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ ■

Beweis 6.12

zu 2) FdA (4.10) $\chi_A = \pm(x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n) \in \mathbb{C}[x]$

Suchen ONB von $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$ aus EV von A.

Aus 6.13 folgt $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Induktion über n:

IA: klar

IS: Wähle EV v_1 zu λ_1 mit $\|v_1\| = 1$

$U := \{v_1\}^\perp$, $\dim U = n-1$

Sei $f_A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $x \mapsto Ax$

wieder gilt: $f_A(U) \subset U$, da $\langle f_A(u), v_1\rangle$

$= u^TA^T\bar{v}_1 = u^T\overline{Av_1} = \langle u, Av_1\rangle = \bar{\lambda}_1 \cdot \underset{\in U}{\langle u, v_1\rangle} = 0$

IV für $f_A|_U$ liefert ONB von U aus EV von A.

Ergänzen mit v_1, liefert ONB von V.

zu 1) Funktioniert wie 2) falls wir wissen, dass χ_A über $\mathbb{R}$ zerfällt.

Aber χ_A zerfällt, da

$$A \in \mathrm{Mat}(n\times n, \mathbb{R}) \text{ symm} \atop \cap \atop \mathrm{Mat}(n\times n, \mathbb{C}) \text{ herm.} \quad \Rightarrow \quad \chi_A = \pm(x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n) \atop \lambda_i \in \mathbb{R}$$

∎

Rechenverfahren

1. Faktorisiere $\chi_A = \pm(x-\lambda_1)^{r_1}\dots(x-\lambda_k)^{r_k}$
   λ_i paarweise verschieden
2. Bestimme Basen B_i für $\mathrm{Eig}(A,\lambda_i)$ (LGS lösen)
   $\dim \mathrm{Eig}(A,\lambda_i) = r_i$
3. Orthonormalisiere die B_i mit Gram-Schmidt
   $\rightsquigarrow$ Zusammen bilden die orthonorm. Basen eine ONB.

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & i \\ -1 & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3\times 3, \mathbb{C})$

$\overline{A}^T = A$

1. $\chi_A = \det\begin{pmatrix} -x & -1 & i \\ -1 & -x & -i \\ -i & i & -x \end{pmatrix} = -x^3 + 1 + 1 + x + x + x$
$= -x^3 + 3x + 2$

Rate $x = -1$ NS $\quad \chi_A = -(x+1)^2(x-2)$

2 und 3

$$\mathrm{Eig}(A,-1) = \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & i \\ -1 & 1 & -i \\ -i & i & 1 \end{pmatrix} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_2} \rangle$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & i \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$w_2' = w_2 - \frac{\langle w_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_2\rangle} w_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-i}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i/2 \\ i/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ONB von $\mathrm{Eig}(A,-1)$: $\tilde{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{w}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} -i/2 \\ i/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Eig}(A,2): \begin{pmatrix} -2 & -1 & i \\ -1 & -2 & -i \\ -i & i & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & i \\ -2 & -1 & i \\ -i & i & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & i \\ 0 & 3 & 3i \\ 0 & 3i & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Eig}(A,2) = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}}_{=w_3} \rangle$$

$$\tilde{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3$ ONB

Bem. Für $S \in O(n)/U(n)$ gilt $\underset{\text{Endom.}}{S^{-1}AS} = \underset{\text{bi/Sesquilinearform}}{\bar{S}^{T}AS}$

1) Endom.-Interpr.

Def.: V eukl./unitär. $f: V \to V$ heißt selbstadjungiert, falls $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle \ \forall v, w \in V$.

Lemma 6.14 B ONB. Dann gilt:

f selbstadjungiert $\Leftrightarrow M_B^B(f)$ symm/hermitesch.

Bem.: $B = (v_1, \dots, v_n)$

$A = M_B^B(f) = (a_{ij})$

Aus 6.5 folgt $f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(v_j), v_i\rangle v_i$

$\Rightarrow a_{ij} = \langle f(v_j), v_i\rangle = \langle v_i, f(v_j)\rangle$

Es folgt:

f selbstadj. $\Leftrightarrow \langle f(v_j), v_i\rangle = \langle v_j, f(v_i)\rangle$

$\Leftrightarrow a_{ij} = \overline{a_{ji}}$

Kor. 6.15 $f: V \to V$ selbstadj.

Dann existiert ONB von V aus EV von f.

Insbesondere ist f diagonalisierbar & alle EW sind reell.

2) BLF - Interpr.

Kor. 6.16: Sei V eukl./unitär

s sym. Bilinearform

hermitesche Sesquilinearform

Dann ex ONB $\mathcal{B}$ von V mit $G_B(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

Beachte:

1) Wir betr. hier zwei BLF ($\underset{\text{skalarpr.}}{\langle , \rangle}$ und s)
6.16 sagt, dass wir sie simultan diagonalisieren können (denn $G_B(\langle , \rangle) = E_n$)

2) Im Allg. (ohne $\langle , \rangle$) sind die „Eigenwerte einer BLF" nicht wohldef.
$S \in Gl(n, \mathbb{R})$ $\quad S^T A S$, A

Kor 6.17 A sym/unitäre Matrix ($\underbrace{x^T A x > 0 \ \forall x \neq 0}_{= \text{pos. def.}}$)

A ist positiv definit genau dann, wenn alle EW λ_i positiv sind.

Beweis: wähle ONB $v_1, \dots, v_n$ so dass V. Für $v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$ gilt:

$$x^T A \bar{x} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mu}_1 \\ \vdots \\ \bar{\mu}_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 \underbrace{(\mu_1)^2}_{\geq 0} + \dots + \lambda_n \underbrace{(\mu_n)^2}_{\geq 0}$$

$> 0 \Leftrightarrow$ alle $\lambda_i > 0$

$\boxtimes$

Satz 6.18 (Minorenkriterium)

$A = (a_{ij})$ sym/unitär $n \times n$ Matrix

Sei $A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$, also $k\left\{\left(\overbrace{\boxed{}}^{k} \quad \right)\right.$

$\in \mathrm{Mat}(k \times k, K)$

Dann gilt: A positiv definit $\Leftrightarrow \det(A_k) > 0 \quad \forall k = 1, \dots n$

Beweis Induktion über n

IA: $n = 1$ $\quad A = (a_{11})$ pos. def. $\Leftrightarrow a_{11} > 0$

IS: $(s(v, w) = v^T A \bar{w})$

$n-1 \to n$

$U = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle \cong K^{n-1} \subset K^n$

"$\Leftarrow$" $\det(A_k) > 0 \overset{IV}{\Rightarrow} A_{n-1}$ pos. def.
$\forall k = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$ Ex ONB $v_1, \dots, v_{n-1}$ von U bzgl. s

Setze $v_n = e_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{s(e_n, v_i)}{\underbrace{s(v_i, v_i)}_{=1}} v_i$

Es folgt $s(v_n, v_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n-1$

Sei $S = T^{(v_1 \dots v_n)}_{(e_1 \dots e_n)}$ Transformationsmatrix

$$S^T A \bar{S} = D = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{array}\right)$$

$\lambda = s(v_n, v_n)$

Außerdem $\lambda = \det D = |\underbrace{\det S}_{>0}|^2 \det A > 0$ $\quad (*)$
$\det A > 0$

$\Rightarrow A$ pos. def.

"$\Rightarrow$" A pos. def. $\Rightarrow A_{n-1}$ pos. def. $\overset{IV}{\Rightarrow} \det(A_k) > 0$
$\forall k = 1, \dots, n-1$

$\det(A) \overset{(*)}{=} \frac{1}{|\det S|^2} \det(E_n) > 0$
Wechsel zu ONB

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ist pos. def.

$\det(A) = 3 > 0$, $\det A = 3 - 2 = 1 > 0$

6.9/6.10 und HAT 6.12 lassen sich wie folgt verallgemeinern

Def.: $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ heißt normal falls $\bar{A}^T A = A A^T$

z.B. A orth/unitär, sym/hermitsch.

Satz 6.19 (Spektralsatz)

A normal & χ_A zerfällt über $K \Leftrightarrow \exists\, S \in O(n)/U(n)$ mit $S^T A \bar{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Beweis: fast wie 6.9/6.11

7 Invarianten einer BLF

Erinnerung: Für bel $S \in Gl(n,k)$ haben A und $S^T A \bar{S}$ verschiedene EW. $\in O(n)/U(n)$

$\Rightarrow$ Sei s BLF auf EW von s ist nicht wohldef.

(„EW von $G_B(s)$ sind keine Invarianten von s")

Aber:

Satz 6.20 (Trägheitsgesetz von Sylvester)

Sei s sym/herm. auf V

a) Dann existiert Basis B mit

$$G_B(s) = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} k \\ l \\ m \end{array}$$

b) Die Zahlen k, l, m sind Invarianten von S (sind gleich für alle solche B)

Beweis: a) Wähle bel. Skalarprodukt $\langle , \rangle$ auf

Nach 6.16 gilt ONB $B=(v_1,\dots,v_n)$ (bzgl $\langle , \rangle$) mit

$$G_B(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Wir skalieren $\tilde{v}_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} v_i, & \text{falls } \lambda_i \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow s(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) = \pm 1$ oder 0 (und $s(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) = 0 \quad \forall i \neq j$)

Durch umordnen der $\tilde{v}_i$ erhalten wir $\tilde{B}$ mit

$$G_{\tilde{B}}(s) = \begin{pmatrix} \boxed{+1} & & \\ & \boxed{-1} & \\ & & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Bem: $\tilde{B}$ ist OGB bzgl $\langle , \rangle$

b) z.z.: $\underbrace{\bar{S}^{T}\begin{pmatrix} \boxed{e_k} & & \\ & \boxed{e_l} & \\ & & \boxed{0} \end{pmatrix} S}_{G_B(s) \; (*)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{e_{k'}} & & \\ & \boxed{e_{l'}} & \\ & & \boxed{0} \end{pmatrix}}_{G_{B'}(s) \; (**)} \Rightarrow k = k', \ l = l'$

Bem.: Da S und $\bar{S}^T$ invertierbar, gilt: $\mathrm{Rang}(G_B(s)) = \mathrm{Rang}(G_{B'}(s))$
$\Rightarrow k + l = k' + l'$

Sei $B = (v_1 \dots v_n)$, $B' = (v_1' \dots v_n')$

und setze $U = \langle v_1 \dots v_k \rangle$, $W = \langle v'_{k'+1}, \dots, v_n' \rangle$

Aus $(*)$ folgt $s(v,v) > 0 \quad \forall v \in U \setminus \{0\}$

$(**)$ folgt $s(v,v) \leq 0 \quad \forall v \in W$

$\Rightarrow U \cap W = \emptyset \Rightarrow k = \dim U \underset{\text{Dim. formel}}{\leq} n - \dim W - k'$

Analog $k' \leq k \Rightarrow k = k'$

Induktion über $n = \dim V$

IS: Für $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ~~...~~ genau wie in 6.9. Da $\lambda_i = \pm 1$, liefert uns

dass $\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} +1 & & \\ & \ddots & \\ & & +1 \end{matrix} & \\ \hline & \boxed{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}} \end{array}\right)$

$\langle \ \rangle \quad < >$

Jetzt wähle μ_1

Sei $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A zu μ_1

$v = x + iy \quad , x, y \in \mathbb{R}^n$

$\bar{v} = x - iy$

$A\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\mu_1 v} = \bar{\mu}_1 \bar{v} \quad \Rightarrow \bar{v}$ ist EV zum EW $\bar{\mu}_1$

Notation: Span ~~...~~ $\langle \dots \rangle$

Skalarprod $\langle \cdot , \cdot \rangle$

Betrachte Span $\langle v, \bar{v} \rangle \subseteq \mathbb{C}^n$

$\langle v, \bar{v} \rangle \cap \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n$

$W = \langle x, y \rangle$

W ist 2-dim reeller UVR von $\mathbb{R}^n$

$A(\langle v, \bar{v} \rangle \Rightarrow A(W) \subseteq W$

und $A|_W$ wieder orthogonale Abb.

$\Rightarrow$ Ex. ONB von W mit

$$A|_W = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

(A_α ~~...~~ mit $\alpha = 0, \pi$ kann nicht auftreten, da EW von $A|_W$ nicht reell)

$U = W^\perp$

wie in 6.9 benutzen IV für $A|_U \qquad \dim U = n-2$

20.01.2016

(E) Hauptachsentransformation (HAT)

Erinnerung: $A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$ symm $\Leftrightarrow A^T = A \triangleq s(x,y) = s(y,x)$
$\mathbb{C}$ hermitesch $\Leftrightarrow \bar{A}^T = A \triangleq s(x,y) = \overline{s(y,x)}$

Satz 6.12 (HAT)

1) Sei $A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$ symm. Dann ex $S \in O(n)$ mit

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2) Sei $A \in Mat(n \times n, \mathbb{C})$ hermitesch. Dann ex $S \in U(n)$ mit

$$S^{-1}AS = \bar{S}^TAS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in \underline{\underline{\mathbb{R}}} \ (!)$$

Lemma 6.13

A herm. $\lambda \in \mathbb{C}$ EW:

Dann gilt $\lambda \in \mathbb{R}$, "Alle EW sind reell"

Bew: Sei v EV zu λ

$$\lambda \|v\|^2 = \lambda(v^T \cdot \bar{v}) = (\lambda v)^T \bar{v} = (Av)^T \cdot \bar{v} = v^T A^T \bar{v} = v^T \overline{Av}$$
$$= v^T \overline{\lambda v} = \bar{\lambda} \|v\|^2$$

Da $\|v\|^2 > 0$, $\lambda = \bar{\lambda} \to \lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Bew. 6.12 zu 2) FdA (4.10) $\chi_A = \pm(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n) \in \mathbb{C}[x]$

Suche ONB von $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$ aus EV von A

Aus 6.13 folgt, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

Induktion über n (= Größe d. Matrix)

IA: klar (also 1×1 Matrix)

IS: Wähle EV v_1 zu λ_1 mit $\|v_1\| = 1$

$$U := \{v_1\}^\perp, \quad \dim U = n-1$$

Sei $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $x \mapsto Ax$

(wdh. U ist das orthogonale Komplement zu v_1)

Wieder gilt: $f_A(U) \subset U$, da $\langle f_A(u), v_1 \rangle$

$$\langle f_A(u), v_1 \rangle = u^T A^T \bar{v}_1 = u^T \overline{Av_1} = \langle u, Av_1 \rangle = \bar{\lambda}_1 \cdot \underbrace{\langle u, v_1 \rangle}_{u \in U} = 0$$

IV für $f_A|_U$ liefert ONB von U aus EV von A

Ergänzen mit v_1 liefert ONB von V

zu 1) Funktioniert wie 2), falls wir wissen, dass χ_A über $\mathbb{R}$ zerfällt,
da $A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$ symm.
$\hookrightarrow \subset Mat(n\times n, \mathbb{C})$ herm $\Rightarrow \chi_A = \pm(x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n)$
$\lambda_i \in \mathbb{R}$ $\square$

Rechenverfahren.

1 Faktorisiere $\chi_A = \pm(x-\lambda_1)^{r_1}\dots(x-\lambda_k)^{r_k}$
λ_i paarweise verschieden

2. Bestimme Basen B_i für $Eig(A, \lambda_i)$ (LGS lösen)
$\dim Eig(A, \lambda_i) = r_i$ (da dim Eig muss mit vielfachheit der NS übereinstimmen)

3. Orthonormalisiere die B_i mit Gram-Schmidt
$\rightsquigarrow$ Zusammen bilden die orthonorm. Basen eine ONB S

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & i \\ -1 & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix} \in Mat(3\times 3, \mathbb{C})$
ist hermitesch, weil auf der Diagonale reelle Einträge stehen & die durch verbundenen komplex konjugiert sind

1. $\chi_A = \det \begin{pmatrix} -x & -1 & i \\ -1 & -x & -i \\ -i & i & -x \end{pmatrix} = -x^3 + 1 + 1 + x + x + x = -x^3 + 3x + 2$

Rate $x=-1$ NS ... $\chi_A = -(x+1)^2(x-2)$

2.&3
$Eig(A,-1) = \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & i \\ -1 & 1 & -i \\ -i & i & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \ker(@) = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_2} \rangle$

jz orthonormalisieren:
$w_2' = w_2 - \frac{\langle w_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-i}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i/2 \\ i/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

ONB von $Eig(A,-1)$: $\hat{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\hat{w}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} -i/2 \\ i/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eig(A,2):
$\begin{pmatrix} -2 & -1 & i \\ -1 & -2 & -i \\ -i & i & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & i \\ -2 & -1 & i \\ -i & i & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & i \\ 0 & 3 & 3i \\ 0 & 3i & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Eig(A,2) = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_3} \rangle$
einfügen

$\tilde{\omega}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3$ ONB (überprüfen)

Bem: Für $S \in O(n) / U(n)$ gilt

$$S^{-1} A S = \bar{S}^T A S$$

Endomorphism. Bilinear/Sesquilinearform

1) Endom. Interpr.

Def: V ~~eukl~~ eukl. / unitär $f: V \to V$ heißt **selbstadjungiert**, falls

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \ \forall v, w \in V$$

Lemma 6.14 ~~B~~ B ONB Dann gilt:

f selbst adj $\Leftrightarrow$ $M_B^B(f)$ symm / hermitesch

Bew: $B = (v_1, \dots, v_n)$

$A = M_B^B(f)$ (a_{ij})

Aus 6.5 folgt $f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(v_j), v_i \rangle v_i$

$\Rightarrow a_{ij} = \langle f(v_j), v_i \rangle = \overline{\langle v_i, f(v_j) \rangle}$

Es folgt:

f selbstadjungiert $\Leftrightarrow \langle f(v_j), v_i \rangle = \langle v_j, f(v_i) \rangle$

$\Leftrightarrow a_{ij} = \overline{a_{ij}}$

Kor. 6.15: $f: V \to V$ selbstadj

Dann ex. ONB von V aus EV von f. Insbesondere ist f diagonalisierbar & alle EW sind reell.

2) BLF-Interpretation:

Kor. 6.16: Sei V eukl / unit,

S symm BLF
hermitesch Sesquilinearform

Dann ex ONB B von V mit

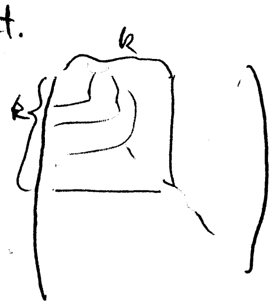
$$G_B(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Beachte: 1) Wir betr. hier zwei BLF ($\underbrace{\langle\cdot,\cdot\rangle}_{\text{Skalarprod}}$ & s).
6.16 sagt, dass wir sie simultan diagonalisieren können (denn $G_B(\langle\cdot,\cdot\rangle) = E_n$)
2) Im Allg. (ohne $\langle\cdot,\cdot\rangle$) sind die „Eigenwerte einer BLF"
nicht wohl-def. $S \in Gl(n, \mathbb{R})$ S^TAS, A

Kor 6.17 A symm / unit. Mat. ($\underbrace{x^TAx > 0 \ \forall x \neq 0}_{= \text{pos. def}}$)
A ist pos.def. gdw alle EW λ_i positiv sind

Bew. Wähle ONB $v_1, \dots, v_n$, ~~Ex~~ sodass für $v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$
~~Dann~~ gilt $x^TA\bar{x} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mu}_1 \\ \vdots \\ \bar{\mu}_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \underbrace{|\mu_1|^2}_{\geq 0} + \dots + \lambda_n \underbrace{|\mu_n|^2}_{\geq 0}$
$> 0 \Leftrightarrow$ alle $\lambda_i > 0$ $\square$

Satz 6.18 (~~...~~ Hurwitzkriterium / Minorenkriterium)
$A = (a_{ij})$ symm / unit. $n \times n$ Mat.
Sei $A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \in Mat(k \times k, K)$, also



Dann gilt:
A positiv definit $\Leftrightarrow$ $\det(A_k) > 0 \ \forall \ k = 1, \dots, n$

Bew: Induktion über n:
IA: $n = 1$ $A = (a_{11})$ posdef $\Leftrightarrow$ $a_{11} > 0$
IS: ($S(v, w) = v^TA\bar{w}$)
$n-1 \mapsto n$
$U = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle \cong K^{n-1} \subset K^n$
„$\Leftarrow$" $\det(A_k) > 0 \overset{IV}{\Longrightarrow} A_{k-1}$ pos def
$\Rightarrow$ Ex ONB $v_1, \dots v_{n-1}$ von U bzgl s
Setze $v_n = e_n - \sum_{i=1}^{n-1} s(e_n, v_i) v_i$ ~~...~~ $s(v_i, v_i) = 1$
Es folgt $s(v_n, v_i) = 0 \ \forall i = 1, \dots, n-1$
Sei $S = T^{(v_1, \dots, v_n)}_{(e_1, \dots, e_n)}$ Transformationsmatrix, so gilt

$$S^T A \bar{S} = D = \begin{array}{c} n-1 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{array}\right) \qquad \lambda = s(v_n, v_n)$$

Außerdem $\lambda = \det D = \underbrace{|\det S|^2}_{>0} \underbrace{\det A}_{= \det(A_n) > 0} > 0 \quad (*)$

$\Rightarrow$ A pos. def.

"$\Longrightarrow$" A pos def $\Rightarrow A_{n-1}$ pos def $\overset{IV}{\Longrightarrow} \det(A_k) > 0$
$\forall k = 1, \ldots, n-1$

$\det(A) \overset{(*)}{=} \frac{1}{|\det S|^2} \det(E_n) > 0$
Wechsel zu ONB ∎

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ist pos. def $\det(\underbrace{A_1}_{=a}) = 3 > 0$ $\det A = 3 - 2$
$= 1 > 0$

6.9/6.10 & HAT 6.12 lassen sich wie folgt verallgemeinern

Def: $A \in Mat(n \times n, K)$ heißt normal, falls
$\bar{A}^T A = A \bar{A}^T$

z.B. A orth. / unitär, sym/herm.

Satz 6.19 (Spektralsatz)

A normal & χ_A zerfällt über $K \Leftrightarrow \exists S \in O(n) / U(n)$ mit $S^T A \bar{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Beweis. fast wie 6.09 / 6.11 ∎

(7) Invarianten einer BLF

<u>Erinnerung</u>: Für <u>bel.</u> $S \in Gl(n,K)$ haben A & $S^T A S$ verschiedene EW.
$\quad \hookrightarrow \in O(n)/U(n)$

$\Rightarrow$ Sei s BLF auf EW von S ist nicht wohldefiniert. ("EW von $G_B(s)$ sind keine Invarianten von s")

Aber: Satz 6.20 (Trägheitsgesetz von Sylvester)

Sei s sym/herm. auf V

a) Dann ex Basis B mit
$$G_B(s) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \begin{matrix} +1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & +1 \end{matrix} & & 0 \\ & \begin{matrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{matrix} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} k \\ \\ l \\ \\ m \end{matrix} \end{array}$$

b) Die Zahlen k, l, m sind Invarianten von s (sind gleich für alle solche B)

<u>Bew:</u> a) Wählen bel. Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V

Nach 6.16 gibt ONB $B = (v_1, \dots, v_n)$ (bzgl $\langle \cdot, \cdot \rangle$) mit $G_B(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\lambda_i \in \mathbb{R}$

Wir skalieren $\tilde{v}_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} v_i & \text{falls } \lambda_i \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $s(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) = \pm 1$ oder 0 (und $s(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) = 0$ $\forall i \neq j$. Durch umordnen der $\tilde{v}_i$ erhalten wir $\tilde{B}$ mit
$G_{\tilde{B}}(s) = \begin{pmatrix} +1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ Bem: $\tilde{B}$ ist OGB bzgl $\langle \cdot, \cdot \rangle$

b) z.z.
$$\underbrace{S^T \begin{pmatrix} E_k & & \\ & E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix} S}_{= G_B(s) \; (*)} = \underbrace{\begin{pmatrix} E_{k'} & & \\ & E_{l'} & \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{= G_{B'}(s) \; (**)} \longrightarrow k = k', \; l = l'$$

Bem: Da S und S^T invertierbar gilt: $\operatorname{Rang}(G_B(s)) = \operatorname{Rang}(G_{B'}(s)) \Rightarrow k + l = k' + l'$

Sei $B = (v_1 \dots v_n)$, $B' = (v_1' \dots, v_n')$

*** [redacted] - E N D E ***