29.01.16

(G) Quadriken

Wähle $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0 \in \mathbb{R}$

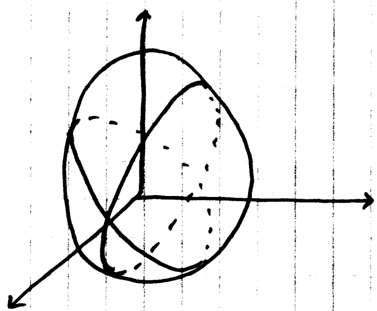
$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \ \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

Ellipsoid

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ orthogonale Abbildung

$f(E) \subset \mathbb{R}^n$

gedrehter Ellipsoid



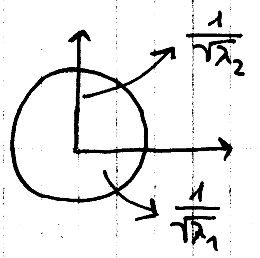
Bsp.:

a) $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$

Standard-Einheitskugel

b) $n = 2$

Ellipse



Sei s Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

$$K_s = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{\| x \|_s}_{= \sqrt{s(x,x)}} = 1 \}$$

s-Einheitskugel

Aus HAT folgt

Kor. 6.21

K_s ist ein gedrehter Ellipsoid

Bew.: Diagonalisiere s mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ orthogonal

jetzt allgemeiner:

Def: Eine quadratische Form in n Variablen ist eine Funktion $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$q(x) = \underbrace{x^T A x}_{\text{quadratisch}} + \underbrace{b^T x}_{\text{linear}} + \underbrace{c}_{\text{konstant}}$$

mit $A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch

$b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$

(also $q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \sum_i b_i x_i + c$)

Die Menge $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ heißt

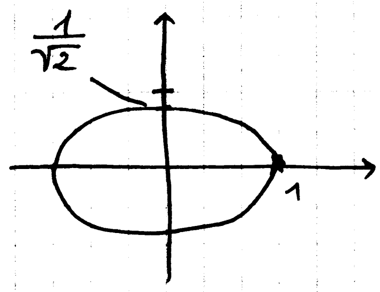
<u>Quadrik</u> (zu q)

Wir sagen Q ist beschrieben durch (A, b, c)

<u>Bsp.</u>: $n = 2$

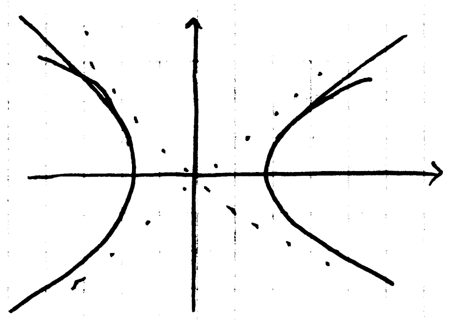
$x_1^2 + 2x_2^2 = 1$

$(\underbrace{x_1^2 + 2x_2^2 - 1}_{q(x)} = 0)$



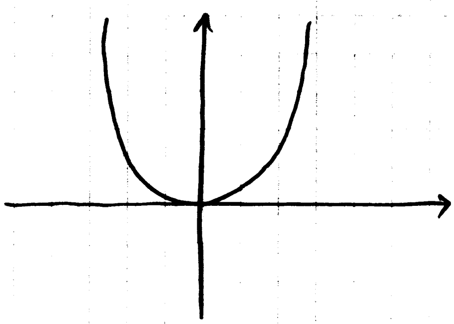
<u>Ellipse</u>

$x_1^2 - x_2^2 = 1$



<u>Hyperbel</u>

$x_1^2 - x_2 = 0$



<u>Parabel</u>

Das sind im Wesentlichen die einzigen Möglichkeiten

<u>$\to$ Klassifikation von Quadriken</u>

<u>Def.</u>: Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der Form

$x \mapsto Sx + v$ mit $S \in O(n)$ $v \in \mathbb{R}^n$ heißt

Isometrie

<u>Bem.</u>: f Isometrie $\Leftrightarrow \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \quad \forall x, y$

$\Rightarrow$ „f erhält Abstände, aber verschiebt den Ursprung nach v." (nicht linear)

Satz 6.22 (HAT für Quadriken)
Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ eine Quadrik. Dann ex. Isometrie $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ so dass $f(Q)$ durch eine der folgenden Gleichungen beschrieben wird:

Normal-form
$$\lambda_1 x_1^2 + \dots \lambda_r x_r^2 = \begin{cases} 0 & \text{A} \\ 1 & \text{B} \\ x_{r+1} & \text{C} \end{cases}$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$, $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_r < 0$
(keine gemischten Terme $x_1 x_2$, höchstens ein linearer Term, $c = 0,1$)

Was bewirkt eine Isometrie?

Lemma 6.22 Q Quadrik beschrieben durch (A, b, c)

a) Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x - v$ ($v \in \mathbb{R}^n$) eine (reine) Translation. Dann $f(Q)$ beschrieben durch $(A, b + 2Av, q(v))$

b) Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto S^{-1}x$ ($S \in O(n)$) eine (reine) Drehung. Dann ist $f(Q)$ beschrieben durch (S^TAS, S^Tb, c)

Beweis:

a) $(x+v)^T A (x+v) + b^T(x+v) + c$

$$= \underline{x^TAx} + \underbrace{x^TAv}_{= v^TAx} + v^TAx + \underline{v^TAv} + b^Tx + \underline{b^Tv} + \underline{c}$$

$$= x^TAx + (2v^TA + b^T)x + \underline{(v^TAv + b^Tv + c)}$$

$$= x^TAx + (b + 2Av)^Tx + q(v)$$

b) $(Sx)^T ASx + b^T Sx + c$

$= x^T S^T A S x + (S^T b)^T x + c$

<u>Beweis 6.22</u>: Wähle Beschreibung (A, b, c) von Q.

Wir gehen schrittweise vor:

1. Reduktion auf $b \in \ker(A)$

Es gilt: $\operatorname{Im}(A) \oplus \operatorname{Im}(A)^\perp = \mathbb{R}^n$

Da A symmetrisch, $\operatorname{Im}(A)^\perp = \ker A$.

Wählen $v \in \mathbb{R}^n$ mit $b + 2Av \in \ker(A)$

Dann liefert Translation $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \; x \mapsto x - v$

eine Quadrik $f(Q)$ mit Darstellung (A, b', c')

mit $b' \in \ker A$.

2. HAT für A (OBdA $b \in \ker A$)

HAT: Es existiert ONB $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ aus EV

zu EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A.

Umnummerieren: OBdA $\lambda_1 \dots \lambda_r \neq 0$

$\lambda_{r+1} \dots \lambda_n = 0$

Falls $b \neq 0$, können wir $v_{r+1} = \frac{1}{\|b\|} \cdot b$ wählen.

$$S = \left(v_1 \middle| \dots \middle| v_n \right) \in O(n) \text{ mit } S^T A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} = D$$

$$S^{-1} b = S^T b = \beta e_{r+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \beta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow r+1 \text{ Stelle}$$

$\beta = \|b\|$

Setze $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \; x \mapsto S^{-1} x$

Dann ist $f(Q)$ beschrieben durch $(D, \beta e_{r+1}, c)$

3. Fallunterscheidung:

1. Fall $\beta = 0$, $c = 0$

Q beschrieben durch $(D, 0, 0)$

Umordnen: $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$, $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_r < 0 \dots$

$\Rightarrow$ Normalform (A)

2. Fall: $\beta = 0$, $c \neq 0$

Q beschrieben $(D, 0, c)$ bzw. $(\frac{1}{c}D, 0, 1)$

Nach Umordnen erhalten wir Normalform B

3. Fall: $\beta \neq 0$

r+1 Stelle

Es gilt: $q(-\frac{c}{\beta}e_{r+1}) = q(0, \dots, -\frac{c}{\beta}, \dots 0)$

$$= \beta(-\frac{c}{\beta}) + c = 0$$

Also können wir nach Translation $f: x \mapsto x + \frac{c}{\beta}e_{r+1}$

annehmen, dass $c = 0$.

$\Rightarrow f(Q)$ beschrieben durch $(D, \beta e_{r+1}, 0)$

bzw. $(\frac{1}{\beta}D, e_{r+1}, 0)$

Umordnen liefert Normalform C.

andere Notation:

$$q(x) = x^T A x + b^T x + c$$

$$= \tilde{x}^T \tilde{A} \tilde{x}$$ eine Dimension höher

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} c & \frac{1}{2}b \\ \hline \frac{1}{2}b & A \end{array}\right) \in \mathrm{Mat}((n+1) \times (n+1))$$

Wir setzen $r := \mathrm{Rang}(A)$

$r' := \mathrm{Rang}(\tilde{A})$

Satz 6.24

Es gilt: $r \leq r' \leq r+2$

Außerdem gilt die Entsprechung:

A $r' = r$ B $r' = r+1$ C $r' = r+2$

Beweis:

Sei $f: x \mapsto Sx + v$ eine Isometrie

Setze $\tilde{S} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline v & S \end{array}\right)$

$$\tilde{S} \cdot \tilde{x} = \tilde{S} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v + Sx \end{pmatrix} = \widetilde{f(x)}$$

Also transformiert sich $A, \tilde{A}$ zu $S^T A S$ und $\tilde{S}^T \tilde{A} \tilde{S}$

$S, \tilde{S}$ invertierbar

$\Rightarrow$ Ränge ändern sich nicht

Es reicht also nach 6.22 sich die NF Ⓐ, ..., Ⓒ anzuschauen

Ⓐ

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$$

$r' = r$

Ⓑ

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$$

$r' = r + 1$

Ⓒ

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc} 0 & 0 & & & \tfrac{1}{2} & 0 & & 0 \\ \hline 0 & \lambda_1 & & & \vdots & & & \\ & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & \lambda_r & & & & \\ \tfrac{1}{2} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \\ 0 & & & & & 0 & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

$r' = r + 2$

(7) Invarianten einer BLF

Erinnerung: Für bel. $S \in GL(n,K)$ haben A & S^TAS verschiedene EW.
$\quad \hookrightarrow \in O(n)/U(n)$

$\Rightarrow$ Sei s BLF auf EW von S ist nicht wohldefiniert. („EW von $G_B(s)$ sind keine Invarianten von s")

Aber:

Satz 6.20 (Trägheitsgesetz von Sylvester)

Sei s symm/herm. auf V

a) Dann ex Basis B mit
$$G_B(s) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} \begin{matrix} +1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & +1 \end{matrix} & & 0 \\ & \begin{matrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{matrix} & \\ 0 & & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} k \\ l \\ m \end{matrix} \end{array}$$

b) Die Zahlen k, l, m sind Invarianten von s (sind gleich für alle solche B)

Bew: a) Wählen bel. Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf

Nach 6.16 gibt ONB $B = (v_1, \dots, v_n)$ (bzgl $\langle\cdot,\cdot\rangle$) mit $G_B(s) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\lambda_i \in \mathbb{R}$

Wir skalieren $\hat{v}_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} v_i & \text{falls } \lambda_i \neq 0 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$ $\Rightarrow s(\hat{v}_i, \hat{v}_i) = \pm 1$ oder 0 (und $s(\hat{v}_i, \hat{v}_j) = 0 \ \forall i \neq j$. Durch umordnen der $\hat{v}_i$ erhalten wir $\tilde{B}$ mit

$G_{\tilde{B}}(s) = \begin{pmatrix} +1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ Bem: $\tilde{B}$ ist OGB bzgl $\langle\cdot,\cdot\rangle$

b) z.z
$$\underbrace{S^T \begin{pmatrix} E_k & & \\ & E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix} S}_{= G_B(s)^{(*)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} E_{k'} & & \\ & E_{l'} & \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{= G_{B'}(s)^{(**)}} \rightarrow k = k', \ l = l'$$

Bem: Da S und S^T invertierbar gilt: $\operatorname{Rang}(G_B(s)) = \operatorname{Rang}(G_{B'}(s)) \Rightarrow k + l = k' + l'$

Sei $B = (v_1 \dots v_n)$, $B' = (v_1' \dots, v_n')$

*** [redacted] - E N D E ***

29.01.2016

6 Quadriken

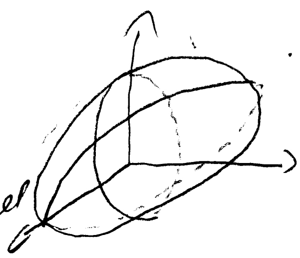
Wähle $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0 \in \mathbb{R}$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

<u>Ellipsoid</u>

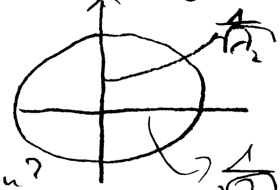
Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ orthogonale Abbildung

$f(E) \subset \mathbb{R}^n$ <u>gedrehter Ellipsoid</u>



Bsp: a) $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$ $\to$ Standard - Einheitskugel

b) $n=2$ $\to$ Ellipse



Was hat das mit unserer Theorie zu tun?

Sei s Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ $\quad K_s = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{\|x\|_s}_{\hat{=}\sqrt{s(x,x)}} = 1 \}$

<u>s- Einheitskugel</u>

Aus der HAT folgt

Korollar 6.21: K_s ist ein gedrehter Ellipsoid

Bew.: Diagonalisiere s mit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ orthogonal.

jetzt allgemeiner:

Def: Eine <u>quadratische Form</u> in n Variablen ist eine Funktion $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$q(x) = \underbrace{x^T A x}_{\text{quadratischer Teil}} + \overbrace{b^T x}^{\text{linearer Term}} + \underbrace{c}_{\text{konstant}} \quad \text{mit } A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \text{ symmetr.}$$

$b \in \mathbb{R}^n$

$c \in \mathbb{R}$

(also $q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \sum_i b_i x_i + c$)

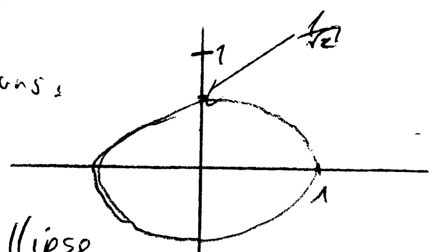
Die Menge (bzgl. q) $\quad Q = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) = 0 \} \subset \mathbb{R}^n$ heißt <u>Quadrik</u> (zu q)

Wir sagen: Q ist beschrieben durch (A, b, c)

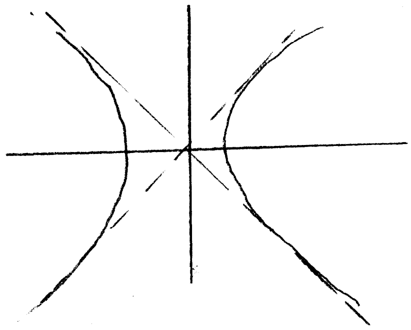
(oder $(\lambda A, \lambda b, \lambda c)$ $\lambda \neq 0$)

<u>Bsp</u>: <u>n=2</u> $\quad x_1^2 + 2x_2^2 = 1$ $\quad$ (oder $\underbrace{x_1^2 + 2x_2^2 - 1}_{q(x)} = 0$)

Liefert uns

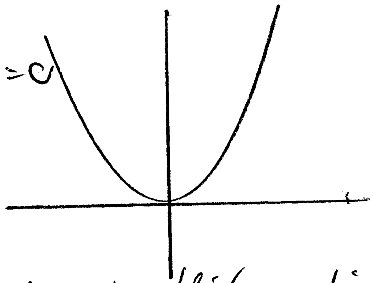


• $x_1^2 - x_2^2 = 1$



Hyperbel

• $x_1^2 - x_2 = 0$



Parabel

Das sind im Wesentlichen die einzigen Möglichkeiten

$\rightarrow$ Klassifikation von Quadriken?

Def: Eine Abb. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der Form $x \mapsto Sx + v$, mit $S \in O(n)$, $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Isometrie

Bemerkung: f Isometrie $\iff$ $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \ \forall x, y$

$\Rightarrow$ ~~Isf erhält~~ Abstände, aber verschiebt den Ursprung nach v. (i.A. nicht linear)

Satz 6.22. (HAT für Quadriken)
Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ eine Quadrik. Dann ex. Isometrie $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sodass $f(Q)$ durch eine der folgenden Gleichungen beschrieben wird:

Normalform (für Quadriken): $\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2 = \begin{cases} 0 & A \\ 1 & B \\ x_{r+1} & C \end{cases}$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$, $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_r < 0$

(keine gemischten Terme $x_1 x_2$, höchstens 1 linearer Term, $c = 0, 1$)

Was bewirkt eine Isometrie?

Lemma 6.23: Q Quadrik beschrieben durch (A, b, c)
a) Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x - v$, $(v \in \mathbb{R}^n)$ eine reine Translation
Dann $f(Q)$ beschrieben durch $(A, b + 2Av, q(v))$

b) Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto S^{-1}x$ $(S \in O(n))$ eine (reine) Drehung.
Dann ist $f(a)$ beschrieben durch (S^TAS, S^Tb, c).

Beweis:

a) $(x+v)^T A(x+v) + b^T(x+v) + c = x^TAx + x^TAv + v^TAx + v^TAv + b^Tx + b^Tv + c$ $\quad v^TAx$, A ist symm

$= x^TAx + (2v^TA + b^T)x + \underbrace{(v^TAv + b^Tv + c)}_{q(v)}$

$= x^TAx + (b + 2Av)^Tx + q(v)$

b) $(Sx)^TASx + b^TSx + c = x^TS^TASx + (S^Tb)^Tx + c$

Beweis 6.22: Wähle Beschreibung (A, b, c) von Q
Wir gehen schrittweise vor.

1. Reduktion auf $b \in \ker(A)$.

Es gilt: $\operatorname{Img}(A) \oplus \operatorname{Img}(A)^\perp = \mathbb{R}^n$

Da A symmetrisch, $\operatorname{Img}(A)^\perp = \ker(A)$. Wählen $v \in \mathbb{R}^n$ mit $b + 2Av \in \ker(A)$. Dann liefert Translation $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto x - v$ eine Quadrik $f(Q)$ mit Darstellung (A, b', c') mit $b' \in \ker(A)$

evtl Christian

2. Schritt: HAT für A (OBdA $b \in \ker(A)$)

HAT: Es ex. ONB $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ aus EV zu EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A.

Umnummerieren: OBdA: $\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$, $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n = 0$

Falls $b \neq 0$, können wir $v_{r+1} = \frac{1}{\|b\|} b$ wählen.

$S = (v_1 | \dots | v_n) \in O(n)$

mit $S^TAS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \lambda v_0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$

$S^{-1}b \underset{\text{(weil } S \text{ orthogonal)}}{=} S^Tb = \beta e_{r+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \beta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ $r+1$-te Stelle, $\beta = \|b\|$

Setze $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto S^{-1}x$, Dann ist $f(Q)$ beschrieben durch $(D, \beta e_{k+1}, c)$

3. Fallunterscheidung

1. Fall $\beta = 0$, $c = 0$ Q beschrieben $(D, 0, 0)$

Umordnen: $\lambda_1, \dots \lambda_k > 0$, $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_r < 0$
$\Rightarrow$ Normalform (A)

2. Fall: $\beta = 0$, $c \neq 0$

Q beschrieben $(D, 0, c)$ bzw $(\frac{1}{c} D, 0, 1)$

Nach Umordnen erhalten wir Normalform (B)

3. Fall: $\beta \neq 0$ Q beschrieben durch $(D, \underbrace{\beta e_{r+1}}_{r+1 \text{ te Stelle}}, c)$

Es gilt: $q(-\frac{c}{\beta} e_{r+1}) = q(0, \dots, -\frac{c}{\beta}, \dots, 0)$
$= \beta(-\frac{c}{\beta}) + c = 0$

Also können wir nach Translation $f: x \mapsto x + \frac{c}{\beta} e_{r+1}$

annehmen, dass $c = 0$

$\Rightarrow f(Q)$ beschrieben durch $(D, \beta e_{r+1}, 0)$

bzw. $(\frac{1}{\beta} D, e_{r+1}, 0)$

Umordnen liefert Normalform (C)

Eine Verknüpfung von Isometrien ist selbst wieder Isometrie

andere Notation:

$q(x) = x^T A x + b^T x + c = \tilde{x}^T \hat{A} \tilde{x}$

$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ $\hat{A} = \left(\begin{array}{c|c} c & 1/2\, b^T \\ \hline 1/2\, b & A \end{array}\right) \in \mathrm{Mat}((n+1) \times (n+1))$

Wir setzen $r := \mathrm{Rang}(A)$
$r' := \mathrm{Rang}(\hat{A})$

Satz 6.24 Es gilt: $r \leq r' \leq r + 2$

Entsprechung: (A) $r' = r$ (B) $r' = r + 1$ (C) $r' = r + 2$

Beweis: Sei $f: x \mapsto Sx + v$ eine Isometrie

Setze $\tilde{S} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline v & S \end{array}\right)$

$$\tilde{S} \cdot \tilde{x} = \tilde{S} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v + Sx \end{pmatrix} = \widetilde{f(x)}$$

Also transformiert sich A, $\hat{A}$ zu ~~$\tilde{S}^T \hat{A} \tilde{S}$~~

$S^T A S$ und $\tilde{S}^T \hat{A} \tilde{S}$

$S, \tilde{S}$ invertierbar $\Rightarrow$ Ränge ändern sich nicht

Es reicht also nach 6.2.?, sich die NF (A), ... (C) anzuschauen

(A)

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$$

$r' = r$

(B)

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$$

$r' = r+1$

(C)

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 0 & & & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \lambda_1 & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ 0 & & & \lambda_r & & & & \\ 1/2 & & & & 0 & & & \\ 0 & & & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

$r' = r+2$