02.02.2016

Normalformen für Quadriken

$$q(x) = \sum a_{ij} x_i x_j + \sum b_i x_i + c$$
$$= x^T A x + b^T x + c$$

$Q = \{ q(x) = 0 \}$

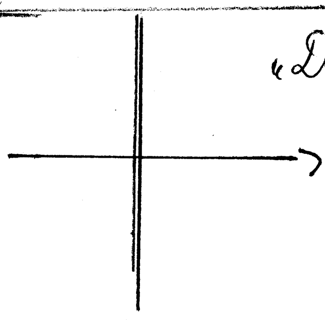
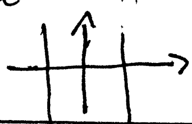
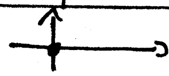
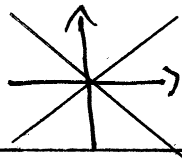
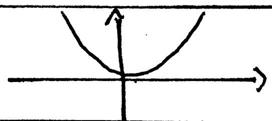
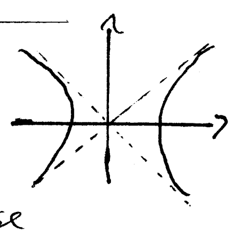
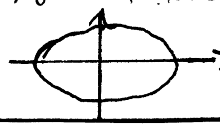
$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 = \begin{cases} 0 & (A) \\ 1 & (B) \\ x_{r+1} & (C) \end{cases}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0 \qquad \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_r < 0$

Der Typ der Normalform ist durch k, r, (A), (B), (C) bzw. k, r, r' gegeben

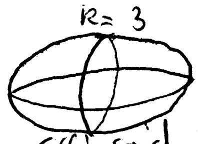
Vertauschen der Vorzeichen ($k \rightsquigarrow r-k$) liefert das selbe, in den Fällen (A) (ersetze q durch $-q$)
(C) (ersetze x_{r+1} durch $-x_{r+1}$)

Bsp: $n=2$ (hier: $\lambda_i \geq 0$)

r'	r	k	Quadrik Q		
(A) 1	1	0, 1	$\lambda_1 x_1^2 = 0$ $(-\lambda_1 x_1^2 = 0)$	 $x_1 = 0$	„Doppelgerade"
2	1 (B)	0	$-\lambda_1 x_1^2 = 1$	$\emptyset$ (Ex keine Lsg)	
		1	$\lambda_1 x_1^2 = 1$, $x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$		parallele Geraden
	2 (A)	0, 2	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 0$		Punkt
		1	$\lambda_1 x_1^2 - \lambda_2 x_2^2 = 0$ $= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2)$		Geradenpaar
3	1 (C)	0, 1	$\lambda_1 x_1^2 = x_2$		Parabel
	2 (B)	0	$-\lambda_1 x_1^2 - \lambda_2 x_2^2 = 1$	$\emptyset$	
		1	$\lambda_1 x_1^2 - \lambda_2 x_2^2 = 1$	Zerlegung via bin. Formel	 Hyperbel
		2	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 1$		Ellipse

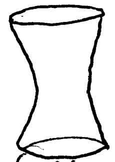
$\underline{n=3}$ $\quad r' = 4 \quad r = 3$ (B)

$k=3$



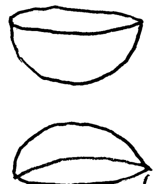
Ellipsoid

$k=2$



Einschaliges Hyperboloid (Kühlturm)

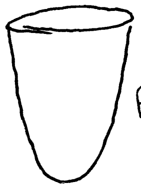
$k=1$



Zweischaliges Hyperboloid

$r = 2$ (C)

$k = 0, 2$



Elliptische Paraboloid

$k = 1$

Hyperbolische Paraboloid

<u>Rechenbeispiel:</u> $(n=2)$

Q gegeben durch $q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 2y + 2$

also $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad c = 2$

1. HAT für A

EW: $0, 2$ wollen jetzt das Teil diagonalisieren d.h. schreibe EV hin!

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}^{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Drehung um $45°$

$$b' = S^T b = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

<u>Zusammengefasst:</u>

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto Sx$ Drehung, $f(Q)$ beschrieben durch die

2. Quadrat. Ergänzung: Gleichung $q'(x,y) = 2y^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2$

$$= 2\left(y + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \sqrt{2}x + 2 - \frac{1}{4}$$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$g(f(Q))$ ist beschrieben durch $q''(x,y) = 2y^2 - \sqrt{2}x + \frac{7}{4}$

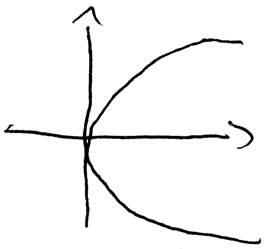
3. $c = 0 \quad -\sqrt{2}\left(x - \frac{7}{4\sqrt{2}}\right)$

$h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{7}{4\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$

$h(g(f(Q))$ beschrieben $q'''(x,y) = 2y^2 - \sqrt{2}x$

bzw: $\frac{q'''(x,y)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}y^2 - x \stackrel{!}{=} 0 \iff \sqrt{2}y^2 = x$

$\Rightarrow r = 1, \ k = 1$, Fall ⓒ



Parabel (Drehung kommt daher, dass die Eigenvektoren vertauscht wurden)

Isometrie ist

$$h \circ g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}^{f\ (\text{Drehung})} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

7. Quotienten- und Dualräume

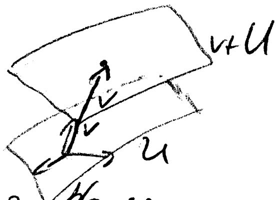
① Quotientenräume

(Erinnerung) sei V ein K-VR, $U \subset V$ ein UVR

Repräsentant der Nebenklasse

Def: $v + U = \{v + u \mid u \in U\} \subset V$

heißt affiner Unterraum, Nebenklasse oder Restklasse (vgl. $a + n\mathbb{Z}$) oder Äquivalenzklasse



Lemma 7.1 (vgl Blatt 4/4)

a) $v + U = w + U \iff v - w \in U$

b) Die Operationen

$(v + U) + (w + U) = (v + w) + U$

$\lambda(v + U) = (\lambda v) + U, \ \lambda \in K$

sind wohldefiniert und machen aus der Menge aller Nebenklassen $V/U := \{v + U \mid v \in V\}$ einen K-Vektorraum

Def: V/U heißt Quotientenraum (bzw Faktorraum) von V bzgl. U

Bem: a) $\pi : V \to V/U$, $v \mapsto v + U$ ist eine lineare Abb. mit $\ker \pi = U$

b) sei $V = U \oplus W$. Dann ist $\pi|_W$ ein Isomorphismus, also $W \cong V/U$

Homomorphiesatz 7.2 (vgl. Blatt 5, Nr 4)

Sei $f: V \to W$ linear. Dann gilt $\boxed{V/_{\ker(f)} \cong \operatorname{img}(f)}$

Beweis: Isomorphismus ist gegeben durch

$$v + \ker(f) \mapsto f(v)$$
$$f^{-1}(w) \longleftarrow w$$
$\neq \emptyset$, da $w \in \operatorname{img}(f)$

Bem: $\dim V < \infty$

$\dim V/U = \dim V - \dim U$

③ Dualräume

Def: V K-VR $\quad V^* := \operatorname{Hom}(V, K) = \{f: V \to K \text{ linear}\}$

heißt Dualraum von V, seine Elemente heißen Linearformen

Bsp: a) $V = \mathbb{R}^3 \quad f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto 2x_1 - 3x_2 + x_3$

ist Linearform, d.h. $f \in V^*$

b) $V = K[x] \quad$ Für $a \in K$ ist $W_a: V \to K, f \mapsto f(a)$

Linearform $\quad W_a \in V^*$

Für $a < b \in K$ gilt

$I_a^b: V \to K, \ f \mapsto \int_a^b f(x)\, dx$

Linearform, $I_a^b \in V^*$

Bem: V^* ist ebenfalls K-VR.

$f, g \in V^*, \ \lambda \in K$

$(f+g)(v) = f(v) + g(v)$

$(\lambda f)(v) = \lambda f(v)$