05.02.15

(B) Dualräume

$V^* := \mathrm{Hom}(V, K) = \{ f : V \to K \text{ linear} \}$
Linearform

Erinnerung: $\dim V < \infty$ $\quad V \cong K^n$

$\mathrm{Hom}(V, K) \cong \mathrm{Hom}(K^n, K)$

$\cong \mathrm{Mat}(1 \times n, K) \cong K^n$

Konvention:

$V = K^n \quad v \in V \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ Spaltenvektor

$l \in V^* \quad l = (l_1, \dots, l_n)$ Zeilenvektoren

$l(v) = l \cdot v = \sum l_i v_i$ Matrizenprodukt / Skalarprodukt

Kor. 7.8 $\dim V < \infty$

Dann gilt: $V \cong V^*$

F: Was ist dann der Unterschied?

A: V und V^* sind nicht „kanonisch" isomorph, es gibt keinen ausgezeichneten Isomorphismus

(*) hängt von Basiswahl ab.

Def.: Sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ von V

Wir definieren die duale Basis $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ von V^* durch.

$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ Kronecker-Delta

(bzw. $v_i^*(\sum_j \lambda_j v_j) = \lambda_i$)

Bsp.: $V = K^n$, $B = (e_1, \dots, e_n)$

$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \Rightarrow e_1^* = (1\ 0 \dots 0)$

$e_i^* = (0 \dots \underset{\uparrow i}{1} \dots 0)$

⚠ v_i^* hängt von ganz B ab, nicht nur von v_i.

Bsp.: $V = \mathbb{R}^2$ $\quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$B^* = ((1, -1), (0, 1))$

Wir setzen

$$\phi_B : V \to V^*$$
$$\sum \lambda_i v_i \mapsto \sum \lambda_i v_i^*$$

Isomorphismus

Sei jetzt s eine BLF auf V.

Sei $v \in V$. Dann liefert $w \mapsto s(v, w)$ eine Linearform.

$\Rightarrow$ s liefert lineare Abb. $\phi_s : V \to V^*$
$v \mapsto s(v, \cdot)$

Def.: s BLF heißt nicht-degeneriert falls
$\forall\, v \neq 0 \in V \ \exists\, w \in V$ mit $s(v, w) \neq 0$

Satz 7.4 Sei B Basis von V. Äquivalent sind:

a) s ist nicht-degeneriert

b) ϕ_s ist bijektiv

c) $G_B(s)$ ist invertierbar.

Beweis:

(a) $\Leftrightarrow$ $\ker \phi_s = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ (b)

(b) $\Leftrightarrow$ (c) Drücke ϕ_s aus bzgl. der Basen B und B^*.

$v = \sum \lambda_i v_i \in V$, $w = \sum \mu_i v_i \in V$, $s(v, \cdot) = \sum z_i v_i^* \in V^*$

$$\underline{z}^T \underline{\mu} = s(v, w) = \underline{\lambda}^T G_B(s) \underline{\mu} \qquad \forall\, \underline{\mu} \in K^n$$

$$\Rightarrow \underline{z}^T = \underline{\lambda}^T G_B(s) \Rightarrow \underline{z} = G_B(s)^T \cdot \underline{\lambda}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad M^B_{B^*}(\phi_s) = G_B(s)^T} \quad \Rightarrow \text{Beh.}$$

Satz 7.5 $\dim V < \infty$

$\{ \phi : V \to V^* \text{ Isomorph.} \} \xleftrightarrow{1.1} \{ s \text{ nicht degeneriert BLF auf } V \}$

$\phi \longmapsto s(v,w) := (\underbrace{\phi(v)}_{\in V^*})(w) \in K$

$\phi_s \longleftarrow s$

Geht alles schief, wenn $\dim V = \infty$

Bsp.: $V = \mathbb{R}[x]$ wir zeigen: $V \not\cong V^*$

indem wir zeigen:

$\dim V \overset{(*)}{=} |\mathbb{N}| < |\mathbb{R}| \overset{(**)}{\leq} \dim(V^*)$

$B = (1, x, x^2, x^3, \ldots)$ Basis von V

(*) V besitzt abzählbare Basis

zu (**): Betrachte $W_a \in V^*$

$a \in \mathbb{R}$ $\quad W_a : V \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(a)$

Beh.: $(W_a)_{a \in \mathbb{R}}$ sind lin. unabh.

Beweis: Sei $\sum_{a \in S} \lambda_a W_a = 0$ $\quad S \subset \mathbb{R}$ endlich

zu zeigen: $\lambda_a = 0 \; \forall a \in S$

$0 = (\sum_{a \in S} \lambda_a W_a)(f) = \sum_{a \in S} \lambda_a f(a) \quad \forall f$

Wähle $a \in S$ und setzen $f_a := \prod_{\substack{b \in S \\ b \neq a}} (x - b) \in \mathbb{R}[x]$

$\Rightarrow \sum \lambda_a f_a(a) = \lambda_a \underbrace{f(a)}_{\neq 0} \Rightarrow \lambda_a = 0$

$\Rightarrow$ Beh.

Def: $U \subset V$ UVR

$U^\perp := \{ f \in V^* \mid f|_U = 0 \}$ (also $f(u) = 0 \; \forall u \in U$) $\subset V^*$

∇ doppelte Notation: Falls V euklidisch/unitär mit Skalarprodukt s, haben wir $U^\perp$ bereits def.

ABER: $\phi_s(\underbrace{U^\perp}_{\subset V}) = U^\perp \subset V^*$

Satz 7.7

$\pi : V \to V/U$

a) Die Abbildung $\alpha : V^*/U^\perp \to U^*$, $l + U^\perp \mapsto l|_U$ ist Isomorphismus

b) Die Abbildung $\beta : (V/U)^* \to U^\perp$, $l \mapsto l \circ \pi$ ist Isom.

Also $V^*/U^\perp \cong U^*$, $(V/U)^* \cong U^\perp$ sind kanonisch isomorph

Beweis:

a) $\varphi : V^* \to U^*$, $l \mapsto l|_U$ liefert surjektive Abb.

$\ker(\varphi) = U^\perp \overset{7.2}{\Rightarrow} V^*/\ker(\varphi) \cong \mathrm{Im}(\varphi)$

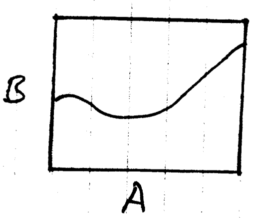
$\Rightarrow V^*/U^\perp \cong U^*$

C) Relationen

Def.: $f : A \to B$ „ordnet jedem $a \in A$ eindeutig ein $b \in B$ zu"

besser: benutzen Graphen

$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B$



Def: Eine Relation zwischen A und B ist eine Teilmenge $R \subset A \times B$.

Mögliche Zusatzaxiome:

(LT) $\forall a \in A\ \exists b \in B$ mit $(a,b) \in R$ linkstotal

(RT) $\forall b \in B\ \exists a \in A$ mit $(a,b) \in R$ rechtstotal

(LE) $\forall a, a' \in A, b \in B : (a,b), (a',b) \in R \Rightarrow a = a'$ linkseindeutig

(RE) $(a,b), (a,b') \in R \Rightarrow b = b'$ rechtseindeutig

Def (neu): Eine Funktion von A nach B ist eine linkstotale und rechtseindeutige Relation $f \subset A \times B$

„Wir definieren Funktionen über ihren Graphen"

Notation: $f: A \to B$, $\forall a$ ist $f(a)$ das eindeutige Element in B mit $(a, f(a)) \in f$.

f rechtstotal $\Leftrightarrow$ surjektiv

f linkseindeutig $\Leftrightarrow$ injektiv

05.02.2016

(B) Dualräume

$V^* := \mathrm{Hom}(V, K) = \{ l : V \to K \text{ linear} \}$

Linearform

Erinnerung: $\dim V < \infty$ $V \cong K^n$

$\mathrm{Hom}(V, K) \cong \mathrm{Hom}(K^n, K)$ $\cong$ (*)

$\cong \mathrm{Mat}(1 \times n, K) \cong K^n$

Konvention: $V = K^n$ $v \in V$ $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ Spaltenvektor

$l \in V^*$ $l = (l_1, \ldots, l_n)$ Zeilenvektor

$l(v) = l \cdot v = \sum l_i v_i$ ~~Ska~~

Matrizenprodukt

Skalarprodukt

Kor. 73 $\dim V < \infty$. Dann gilt: $V \cong V^*$

F: Was ist dann der Unterschied?

A: V und V^* sind nicht „kanonisch" isomorph, es gibt keinen ausgezeichneten Isomorphismus.

(*) hängt von Basiswahl ab

Def.: Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V. Wir definieren die duale Basis $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ von V^* durch $v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

(bzw. $v_i^*(\sum_j \lambda_j v_j) = \lambda_i$) Kronecker-Delta

Bsp: $V = K^n$, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$

$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow i \Rightarrow e_1^* = (1\ 0 \ldots 0)$

$e_i^* = (0 \ldots \underset{i}{1} \ldots 0)$

⚠ v_i^* hängt von ganz $\mathcal{B}$ ab, nicht nur von v_i.

Bsp: $V = \mathbb{R}^2$ $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\mathcal{B}^* = ((1, -1), (0, 1))$

Wir setzen $\Phi_{\mathcal{B}} : V \to V^*$ Isomorphismus

$\sum \lambda_i v_i \longmapsto \sum \lambda_i v_i^*$

Sei jetzt s eine BLF auf V. Sei $v \in V$. Da $w \mapsto s(v,w)$ eine Linearform, $\Rightarrow s$ liefert lineare Abb

$\Phi_s : V \to V^*$
$v \mapsto s(v,\cdot)$

Def: s BLF heißt nicht degeneriert, falls $\forall\, v \neq 0 \in V \;\exists\, w \in V$ mit $s(v,w) \neq 0$.

Satz 7.4: Sei $\mathcal{B}$ Basis von V. Äquivalent sind:
a) s ist nicht-degeneriert
b) Φ_s ist bijektiv
c) $G_B(s)$ ist invertierbar

Beweis:
a) $\Leftrightarrow \ker \Phi_s = \{0\} \Leftrightarrow$ (b)
b) $\Leftrightarrow$ (c) Drücke Φ_s aus bzgl. der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}^*$
$v = \sum \lambda_i v_i \in V$, $w = \sum \mu_i v_i \in V$, $s(v,\cdot) = \sum \sigma_i v_i^* \in V^*$
$\sigma^T \mu = s(v,w) = \lambda^T G_B(s)\, \mu \quad \forall \mu \in K^n$ ≙ Vektoren
$\Rightarrow \sigma^T = \lambda^T G_B(s) \Rightarrow \sigma = G_B(s)^T \cdot \lambda$
$\Rightarrow \boxed{M^B_{B^*}(\Phi_s) = G_B(s)^T} \Rightarrow$ Beh.

Satz 7.5: $\dim V < \infty$

$$\{\Phi : V \to V^* \text{ Isomorph.}\} \xleftrightarrow{1:1} \{s \text{ nicht-degenerierte BLF auf } V\}$$
$$\Phi \longmapsto s(v,w) := \Phi(v)(w) \in K$$
$$\Phi_s \longmapsfrom s$$

Geht alles schief wenn $\dim V = \infty$

Bsp: $V = \mathbb{R}[x]$. Wir zeigen: $V \not\cong V^*$ indem wir zeigen: $\dim V \overset{(*)}{=} |\mathbb{N}| < |\mathbb{R}| \overset{(**)}{\leq} \dim(V^*)$

$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3, \dots)$ Basis von V.
(*) V besitzt abzählbare Basis
zu (**): Betrachte $W_a \in V^*$, $a \in \mathbb{R}$. $W_a : V \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(a)$

~~$\sum \lambda_i x^i$~~ Beh: $(W_a)_{a \in \mathbb{R}}$ sind linear unabh.
Bew.: Sei $\sum_{a \in S} \lambda_a W_a = 0$, $S \subset \mathbb{R}$ endlich. zu zeigen: $\lambda_a = 0 \;\forall a \in S$
Wähle $a \in S$ und setzen $f_a = \prod_{\substack{b \neq a \\ b \in S}} (x - b) \in \mathbb{R}[x]$
$\Rightarrow \sum \lambda_a f_a(a) = \lambda_a f_a(a) \Rightarrow \lambda_a = 0$
$\Rightarrow$ Beh.

λ_a, $f(a)$ die zwei „a" haben nix miteinander zu tun

Def: $U \subset V$ UVR
$U^\perp := \{f \in V^* \mid f|_U \equiv 0\} \subset V^*$
also $f(u)=0 \ \forall u \in U$

⚠ doppelte Notation: Falls V euklidisch/unitär mit Skalarprodukt s, haben wir $U^\perp$ bereits definiert.

ABER: $\Phi_s(\underset{\subseteq V}{U^\perp}) = U^\perp \subset V^*$

Satz 7.7.
a) Die Abb. $\alpha: V^*/U^\perp \to U^*$, $l + U^\perp \mapsto l|_U$ ist Isomorphismus

b) $\pi: V \to V/U$ Die Abb. $\beta\ (V/U)^* \to U^\perp$, $l \mapsto l \circ \pi$ ist Isomorph

Also $V^*/U^\perp \cong U^*$ sind <u>kanonisch</u> isomorph
$(V/U)^* \cong U^\perp$

Beweis:

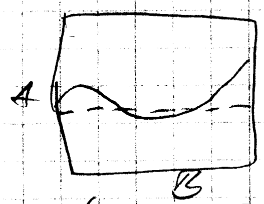
a) $\varphi: V^* \to U^*$, $l \mapsto l|_U$ liefert surjektive Abb.
$\ker(\varphi) = U^\perp \Longrightarrow V^*/\ker\varphi \cong \operatorname{img}(\varphi)$
$\Rightarrow V^*/U^\perp \cong U^*$

C) Relationen

Def $f: A \to B$ „ordnet jedem $a \in A$ eindeutig ein $b \in B$ zu"

besser: benutzen Gra

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B$$



Def. Eine <u>Relation</u> zwischen A und B ist eine Teilmenge $R \subset A \times B$.

mögliche Zusatzaxiome:

(LT) $\forall a \in A \ \exists b \in B$ mit $(a,b) \in R$ — linkstotal

(RT) $\forall b \in B \ \exists a \in A$ mit $(a,b) \in R$ — rechtstotal

(LE) $\forall a, a' \in A,\ b \in B: (a,b), (a',b) \in R \Rightarrow a = a'$ — linkseindeutig

(RE) $\forall$ $(a,b), (a,b') \in R \Rightarrow b = b'$ — rechtseindeutig

Def (neu) Eine <u>Funktion</u> von A nach B ist eine linkstotale und rechtseindeutige Relation $f \subset A \times B$

„Wir definieren Fkt über ihren Graphen" ~~Notation~~ f

Notation: $f: A \to B$, $\forall a$ ist $f(a)$ das eindeutige Element in B
mit $(a, f(a)) \in f$

f rechtstotal $\Leftrightarrow$ surjektiv
f linkseindeutig $\Leftrightarrow$ injektiv