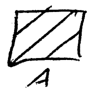
09.02.2016

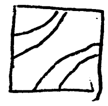
jetzt $A = B$: $R \subset A \times A$ <u>homogene</u> Relation

Notation: $(a,b) \in \quad :\Leftrightarrow: aRb$

noch mehr Axiome:

(R) $\forall a \in A: (a,a) \in R$ / aRa (<u>reflexiv</u>) A  $D = \{x, x\}$

($\neg$R) $\forall a \in A: (a,a) \notin R$ (<u>irreflexiv</u>) 

(S) $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$ (<u>symmetrisch</u>) 

($\neg$S) $(a,b) \in R$ und $(b,a) \in R \Rightarrow a = b$ (<u>antisymmetr.</u>)

(T) $(a,b) \in R$, $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$ (~~transitiv~~)
aRb, $bRc \Rightarrow aRc$

(V) $\forall a,b$ gilt, $(a,b) \in R$ oder $(b,a) \in R$ (<u>vollständig</u>)
oder Total

Def: Eine homogene Relation $R \subset A \times A$ heißt

a) <u>Äquivalenzrelation</u> $R = \sim$
wenn (R), (S), (T) gelten

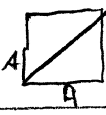
b) <u>Ordnung</u> $R = \leq$ wenn (R), ($\neg$S), (T) gelten
Bsp: $\subseteq$ auf Pot(M)

c) vollständige Ordnung $\leq$ wenn (R), ($\neg$S), (T), (V) gelten
Bsp: $\leq$ auf $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$

d) <u>Striktordnung</u> $<$: wenn ($\neg$R), (T) Bsp $\subsetneq$, $<$ auf $\mathbb{R}$
$(\Rightarrow (\neg S))$

[Definitionen siehe nach Tabelle Anm. d. Red.]

Bsp: (Äquivalenzrelationen)

$\sim$	Menge	Def.	$A/\sim$, Äquivalenzklassen, Normalformen
(i) = Gleichheit	alle	$a \sim b \Leftrightarrow a = b$ 	$[a] = \{a\}$ $\quad A/\sim \xleftrightarrow{1:1} A$
(vi) äquivalent	$Mat(n \times m, K)$	$\exists S, T$ invertierbar mit $B = SAT^{-1}$	$[A] = \{B \mid Rang\ A = Rang(B)\}$ $A/\sim \xleftrightarrow{1:1} \{0, \dots, \min(n,m)\}$ Normalform: $r\{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$
(vii) ähnlich	$Mat(n \times n, K)$	$\exists S$ invertierbar mit $B = SAS^{-1}$	charakteristisches Polynom, Eigenwerte Normalform: Diagonalmatrizen Jordan'sche Normalform
(v) $\overset{LGS}{\sim}$	$Mat(n \times m, K)$	$A \overset{LGS}{\sim} B :\Leftrightarrow \ker(A) = \ker(B) \Leftrightarrow A$ und B stellen dasselbe homogene LGS dar $\Leftrightarrow B = SA$ $\exists S$ invertierbar	Zeilenumformungen, Gauß-Algorithmus, ZSF

$\sim$	Menge	Def.	$A/\sim$, Äquivalenzklassen, Normalformen
(ii) $\equiv$ mod n	$\mathbb{Z}$	$a \equiv b$ mod n $\Leftrightarrow$ a und b liefern selben Rest beim Teilen durch n $\Leftrightarrow$ n teilt $a-b$	$A/\sim = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (zyklische Grp) $[a] = a + n\mathbb{Z}$; Normalform: zu jeder $[a]$ $\exists$ eindeutig $b \in \{0, \ldots, n-1\}$ mit $[b] = [a]$
(viii) $\overset{OB}{\sim}$ Orientierung	V: K-VR $\{$Basen von $V\}$	$\mathcal{B} \overset{OB}{\sim} \mathcal{B}' \Leftrightarrow \det(T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}) > 0$ „$\mathcal{B}$ & $\mathcal{B}'$ sind gleichorientiert"	$A/\sim$ besteht aus 2 Elementen $\hat{=}$ 2 Orientierungen von V
(iii) $U \subset V$ UVR $\overset{U}{\sim}$	V K-VR	$v \overset{U}{\sim} w :\Leftrightarrow v - w \in U$	...
(ix) $\overset{BCF}{\sim}$	$\mathrm{Mat}(n \times n, K)$	$A \overset{BCF}{\sim} B \Leftrightarrow \exists$ S invertierbar $B = S^T A S$	
(x) $\overset{HAT}{\sim}$	$\{A$ symmetr. oder hermitesch$\}$	$A \overset{HAT}{\sim} B :\Leftrightarrow \exists$ S orthogonal/unitär $B = S^T A S$	
(xi) iso $\sim$ isometrisch	$\{$Quadriken $Q \in \mathbb{R}^n\}$	$Q \overset{iso}{\sim} Q' :\Leftrightarrow \exists$ Isometrie f	
(iv) $\cong$	$\{V$ Räume$\}$	$V \cong W :\Leftrightarrow \exists$ Isom. $f: V \xrightarrow{\sim} W$	$\dim V < \infty$: $A/\sim \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\dim(V) = \dim(W)$; Normalform: K^n

Def: Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Wir definieren $\forall a \in A$:
$[a] = [a]_\sim := \{b \in A \mid a \sim b\} \subset A$ Äquivalenzklasse von a

$A/\sim := \{[a] \mid a \in A\}$ Quotientenmenge

„Normalform" (von a) = besonderer Repräsentant einer Äquivalenzklasse (spezielles $b \in [a]$)

Lemma 7.3 Sei $\sim$ Äquivalenzrelation auf A, $a, b \in A$.
Dann gilt entweder $[a] = [b]$ (wenn $a \sim b$) oder $[a] \cap [b] = \emptyset$ (wenn $a \not\sim b$).

Insbesondere folgt: $A = \dot{\bigcup}_{[a] \in A/\sim} [a]$

Bew. Sei $c \in [a] \cap [b]$ $\Rightarrow$ $a \sim c$ und $b \sim c$
$\overset{(S)}{\Rightarrow}$ $a \sim c$ und $c \sim b$
$\overset{(T)}{\Rightarrow}$ $a \sim b$
$\overset{(S),(T)}{\Rightarrow}$ $[a] = [b]$

(D) Gruppenoperationen

Alle Bsp.e (außer (iv)) lassen sich wie folgt beschreiben:

Def: Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und M eine Menge. Eine Abb

$$\ast : G \times M \longrightarrow M \qquad \left(\begin{array}{l} \text{Notation:} \\ \ast(g,m) = g \ast m \in M \\ g \in G,\ m \in M \end{array} \right)$$

heißt Gruppenoperation oder (-aktion), genauer Linksoperation, falls $\ast$

1) $e \ast m = m \quad \forall m \in M$ (e neutrales Element von G)
2) $(g \cdot h) \ast m = g \ast (h \ast m) \quad \forall g, h \in G,\ m \in M$

(Rechtsoperation: 2') $(g \cdot h) \ast m = h \ast (g \ast m)$ (spielt nur dann eine Rolle, wenn G nicht kommutativ))

Vorstellung: G stellt bestimmte Symmetrien von M dar.