12.02.16

① Gruppenoperationen

$$G \times M \to M \leftarrow \text{Menge}$$
$$(g, m) \mapsto g * m$$
Gruppe

1. $e * m = m$
2. $(g \cdot h) * m = g * (h * m)$ Linksoperation

2' $(g \cdot h) * m = h * (g * m)$ Rechtsoperation

Die zugehörige Äquivalenzrelation:

$a \sim_* b :\Leftrightarrow \exists g \in G : b = g * a$

$a, b \in M$

$G \cdot a := [a]_{\sim_*} = \{ g * a \mid g \in G \}$ Bahn / Orbit von a

$M/G := M/\sim_*$

Bsp.:

ii) $a \equiv b \mod n$ $\qquad [a] = a + n\mathbb{Z}$

$G = \mathbb{Z}, M = \mathbb{Z}$

$$G \times M \to M$$
$$(k, a) \mapsto a + kn$$

vii) Ähnlichkeit

$A, B \in Mat(n \times n, K)$

$A \overset{\text{ähn.}}{\sim} B :\Leftrightarrow \exists S \in GL(n, k)$ mit $B = SAS^{-1}$

$M = Mat(n \times n, K)$ $\qquad G \times M \to M$

$G = Gl(n, k)$ $\qquad (S, A) \mapsto S * A := SAS^{-1}$

* ✓ Links Gruppenoperation, da 1) $E_n \cdot A \cdot E_n^{-1} = A$

2) $(S \cdot T) * A = (ST) \cdot A \cdot (ST)^{-1} = ST \cdot AT^{-1}S^{-1}$

$= S(TAT^{-1})S^{-1}$

$= S(T * A)S^{-1}$

$= S * (T * A)$

Verwenden wir stattdessen $S * A = S^{-1}AS$, erhalten wir eine Rechtsoperation

vi) Äquivalenz $A, B \in Mat(n \times m, K)$

$$A \overset{\text{äqu.}}{\sim} B \;:\Leftrightarrow\; \exists\; S, T \text{ invert. mit } B = SAT^{-1}$$

$G = GL(n,K) \times GL(m,K)$

$(S,T) \cdot (S', T') = (S \cdot S', T \cdot T')$

$G \times M \to M$

$((S,T), A) \mapsto (S,T) * A := SAT^{-1}$

liefert Linksoperation

Bsp.: G Gruppe

$U \subset G$ Untergruppe

U (Gruppe) operiert auf G (Menge) durch

$U \times G \to G$

$(u, g) \mapsto u * g = gu^{-1}$ Linksoperation

($u * g := gu$ liefert Rechtsoperation)

(Bsp. ii) $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$)

Bahn von $g = gU = \{gu \mid u \in U\}$ Linksoperation

[Benutzen wir $u * g = ug$ (Linksoperation) erhalten wir Rechtsnebenklassen Ug]

$\overset{7.3}{\Rightarrow}$ $G = \dot{\bigcup}_{gU \in LNK} gU$

$a \in M$

<u>Def</u>: Stabilisator von a

$$Stab(a) := \{ g \in G \mid g * a = a \} \subset G$$

Übung: $Stab(a) \subset G$ ist Untergruppe

Satz 7.4 (Bahnformel)

Sei $*$: $G \times M \to M$ Linksaktion mit G endlich

Sei $a \in M$ beliebig. Dann gilt:

$$|G| = |Ga| \cdot |stab(a)|$$

Gruppe = Bahn · Stabilisator

Insbesondere teilt $|Ga|$ die Ordnung der Gruppe.

Satz 7.5 (Satz von Lagrange)

G endl. Gruppe, $U \subset G$ Untergruppe

$[G:U] :=$ Anzahl der Linksnebenklassen $= |\{gU \mid g \in G\}|$

Dann gilt: $|G| = |U| \cdot [G:U]$ $\left([G:U] = \frac{|G|}{|U|}\right)$

Insbesondere teilt $|U|$ die Ordnung von G.

Beweis (7.5)

1. Alle LNK haben dieselbe Mächtigkeit, also

$|gU| = |g' \cdot U| \quad \forall g, g' \in G$

Wir zeigen $|U| = |gU| \; \forall g \in G$

Sei $L = gU$

Dann liefert $U \to L$
$u \mapsto gu$

eine Bijektion, denn

$L \to U$
$l \mapsto g^{-1} l$ liefert Umkehrabbildung.

2. Aus dem Bsp. wissen wir $G = \dot{\bigcup} gU$

$\Rightarrow |G| = \sum_{gU \text{ LNK}} |gU| = \sum_{gU \text{ LNK}} |U| = [G:U] \cdot U$

Beweis (7.4):

Sei $a \in M$, $U := \mathrm{Stab}(a) \subset G$

$\mathcal{L} := \{ gU \mid g \in G \}$ Menge aller LNK

$\overset{7.5}{\Rightarrow} |G| = |U| \cdot |\mathcal{L}|$

noch zu zeigen: $|\mathcal{L}| = |Ga|$

Konstruieren Bijektion:

$$\mathcal{L} \to Ga$$
$$gU \mapsto g * a$$

1. Wohldefiniertheit: $gU = g'U \Rightarrow g * u = g' * u$

$gU = g'U \Rightarrow g' = g \cdot u$ für ein $u \in U$

$\Rightarrow g' * a = (g \cdot u) * a = g * \underbrace{(u * a)}_{u \in \mathrm{Stab}(a)} = g * a$

2. injektiv: $g * a = g' * a$ (zu zeigen: $gU = g'U$)

$\overset{g^{-1} * |}{\Rightarrow} a = (g^{-1} g') * a$

$\Rightarrow g^{-1} g' \in \mathrm{Stab}(a)$

$\Rightarrow g^{-1} g' = u \in U$

$\overset{g \cdot |}{\Rightarrow} g' = gu \Rightarrow gU = g'U$

3. surjektiv: Sei $b \in Ga$

Nach Def. $b = g * a$ für ein $g \in G$

$\Rightarrow gU \mapsto b$

D) Gruppenoperationen

Alle Bsp.e (außer (iv)) lassen sich wie folgt beschreiben:

Def: Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe und M eine Menge. Eine Abb

$*: G \times M \longrightarrow M$ (Notation: $*(g,m) = g * m \in M$, $g \in G$, $m \in M$) heißt **Gruppenoperation** oder (-aktion), genauer: Linksoperation, falls $*$

1) $e * m = m \quad \forall m \in M$ (e neutrales Element von G)
2) $(g \cdot h) * m = g * (h * m) \quad \forall g,h \in G \;\; m \in M$

(Rechtsoperation: 2') $(g \cdot h) * m = h * (g * m)$ (spielt nur dann eine Rolle, wenn G nicht kommutativ))

Vorstellung: G stellt bestimmte Symmetrien von M dar.

12.02.2016

Grp-operationen
a Menge

$$G \times M \to M$$

Grp $\to$ $(g, m) \mapsto g * m$

1) $e * m = m$
2) $(g \cdot h) * m = g * (h * m)$ Linksoperation
2') $(g \cdot h) * m = h * (g * m)$ Rechtsoperation
$m * (g \cdot h) = (m * g) * h$

Die zugehörige Äquivalenzrelation:

$$a \sim_* b :\Leftrightarrow \exists g \in G : b = g * a$$

$a, b \in M$

$$Ga := [a]_{\sim_*} = \{ g * a \mid g \in G \}$$ Bahn von a (auch Orbit)

$$M/G := M/\sim_*$$

Bsp: (Nummerierung von letztem mal)
(ii) $a \equiv b \mod n$ $\quad [a] = a + n\mathbb{Z}$
$G = \mathbb{Z}, M = \mathbb{Z}$

$G \times M \to M$
$k, a \mapsto a + kn$ (Ist die zugehörige Grp op.)

vii) Ähnlichkeit
$A, B \in Mat(n \times n, K)$ $\quad A \overset{ähnl.}{\sim} B :\Leftrightarrow \exists S \in Gl(n, K)$ mit $B = SAS^{-1}$

$M = Mat(n \times n, K)$ $\quad G \times M \to M$
$G = Gl(n, K)$ $\quad (S, A) \mapsto S * A := SAS^{-1}$

Links * Grpoperation, da 1) $E_n \cdot A E_n^{-1} = A$
2) $(S \cdot T) * A = (ST) \cdot A (ST)^{-1} = STAT^{-1}S^{-1} = S(TAT^{-1})S^{-1}$
$= S(T * A)S^{-1} = S * (T * A)$

Verwenden wir stattdessen die Vorschrift $S * A = S^{-1}AS$, erhalten wir die Rechtsoperation.

vi) Äquivalenz $A, B \in Mat(n \times m, K)$
$A \overset{äqu}{\sim} B :\Leftrightarrow \exists S, T$ invert. mit $B = SAT^{-1}$

$$G = Gl(n, K) \times Gl(m, K)$$

$$(S, T) \circ (S', T') = (S \cdot S', T \cdot T')$$

$G \times M \to M$
$((S, T), A) \mapsto (S, T) * A := SAT^{-1}$ liefert Linksoperation

Bsp: G Gruppe, $U \subset G$ Ufrgp

U (Gruppe) operiert auf G (Menge) durch

$U \times G \to G$ (u ist Grp, G wird nur als Menge aufgefasst)

$(u,g) \mapsto u * g = gu^{-1}$ (Linksoperation)

($u*g := gu$ liefert Rechtsoperation

(Bsp: ii) können wir so umformen $\to n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$)

Bahn von $g = gU = \{gu \mid u \in U\}$ Linksnebenklassen

[Benutzen wir stattdessen $u * g = ug$ (Linksoperation), erhalten wir Rechtsnebenklassen Ug]

$\overset{7.3}{\Longrightarrow}$ $G = \dot{\bigcup}_{gU \text{ LNK}} gU$.

$a \in M$.

Def: Stabilisator von a $\quad \mathrm{Stab}(a) := \{g \in G \mid g*a = a\} \subset G$

Übung: $\mathrm{Stab}(a) \subset G$ ist Untergruppe.

Satz 7.4 (Bahnformel)

Sei $*: G \times M \to M$ Linksaktion mit G endlich.

Sei $a \in M$ beliebig. Dann gilt:

$$\underset{\text{Gruppe}}{|G|} = \underset{\text{Bahn}}{|Ga|} \cdot \underset{\text{Stabilisator}}{|\mathrm{Stab}(a)|}$$

Insbesondere teilt $|Ga|$ (die Mächtigkeit jeder Bahn) die Ordnung der Gruppe

Satz 7.5. (Satz von Lagrange)

G endl. Gruppe, $U \subset G$ Untergrp.

$[G:U] :=$ Anzahl der Linksnebenklassen $= |\{gU \mid g \in G\}|$

Dann gilt: $|G| = |U| \cdot [G:U]$

$$\left([G:U] = \frac{|G|}{|U|}\right)$$

Insbesondere teilt $|U|$ die Ordnung von G

Beweis (7.5):
1. Alle LNK haben dieselbe Mächtigkeit, also $|gU| = |g'U|$ $\forall g, g' \in G$. Wir zeigen: $|U| = |g \cdot U|$ $\forall g \in G$.
Sei $L = gU$. Dann liefert ~~die Bijektion~~ $U \to L$ eine Bijektion, denn $L \to U$, $l \mapsto g^{-1} l$ liefert $u \mapsto g \cdot u$ Umkehrabb.

2. Aus dem Bsp wissen wir $G = \dot{\bigcup} gU \Rightarrow |G| = \sum_{gU\ LNK} |gU|$
$= \sum_{gU\ LNK} |U| = [G:U] \cdot |U|$

Beweis (7.4):
Sei $a \in M$, $U := Stab(a) \subset G$ $\overset{7.5}{\Rightarrow}$ $|G| = |U| \cdot |\mathcal{L}|$
$\mathcal{L} := \{gU \mid g \in G\}$ Menge aller LNK
bzw. $|\mathcal{L}| = |G a|$: konstruieren Bijektion: $\mathcal{L} \to Ga$, $gU \mapsto g * a$
1. Wohldefiniertheit: $gU = g'U \Rightarrow g * u = g' * u$.
$g \cdot U = g'U \Rightarrow g' = g \cdot u$ für ein $u \in U$
$\Rightarrow g' * a = (g \cdot u) * a = g * \underbrace{(u * a)}_{u \in Stab(a)} = g * a$
2. injektiv: $g * a = g' * a$ (zu zeigen: $gU = g'U$)
$g^{-1}|$
$a = (g^{-1} g') * a$
$\Rightarrow g^{-1} g' \in Stab(a)$
$\Rightarrow g^{-1} g' = u \in U$
$g|$
$g' = gu \Rightarrow gU = g'U$

3. surjektiv: Sei $b \in Ga$
Nach Def $b = g * a$ für $g \in G$
$\Rightarrow gU \mapsto b$