



## Übungen zur Vorlesung Mathematik für Informatiker 2

Sommersemester 2014

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 02.07.2014 **vor der Vorlesung** abzugeben.**Blatt 10**

25. Juni 2014

**Aufgabe 1** (Tschebyscheff-Polynome). Sei  $T_n$  das  $n$ -te Tschebyscheff-Polynom, welches rekursiv definiert ist durch  $T_0(x) = 1$ ,  $T_1(x) = x$  und  $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$  für  $n \geq 2$ .

(a) Zeigen Sie induktiv, dass

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \text{ für } x \in [-1, 1].$$

(b) Zeigen Sie, dass die Tschebyscheff-Polynome eine Orthogonalbasis von  $\mathbb{R}[x]$  bzgl. des gewichteten Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

bilden.

(Hinweis: Betrachten Sie die Substitution  $x = \cos(t)$ . Sie können außerdem verwenden, dass  $\{\cos(nt)\}_{n \geq 0}$  ein Orthogonalsystem bzgl. des standard Skalarproduktes  $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$  ist.)

**Aufgabe 2** (Lineares Gleichungssystem über endlichen Körpern). Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

über einem endlichen Körper  $\mathbb{F}_p$ . Für welche Primzahlen  $p$  ist das Gleichungssystem lösbar? Bestimmen Sie in diesen Fällen die Lösungsmenge.

**Aufgabe 3** (Rekursive Folgen). Gegeben ist eine rekursiv definierte Folge  $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$  für  $n \geq 2$  mit den Anfangswerten  $a_1 = a_0 = 1$ . Bestimmen Sie eine geschlossene Formel für  $a_n$ .

**Aufgabe 4** (LR-Zerlegung). Berechnen Sie eine LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -4 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie mit Hilfe dieser Zerlegung das Gleichungssystem  $Ax = b$  für  $b = (1 \ 2 \ 1)^t$ .