0x8.0xD Korollar

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar, $m \geq n$, $a \in U$ ein Punkt, mit $rg(Df(a)) = n$, $k = m - n$. Dann ex. V von a, $W \subset \mathbb{R}^m$ von $b = f(a)$ und eine stetig diffbare Abb. $g: W \to \mathbb{R}^k$, sd. $f(V) = g^{-1}(0)$, mit $rg(Dg(b)) = k$, $g(b) = 0$.

Beweis: Einer der $n \times n$ Minoren von $Df(a)$ ist $\neq 0$. Nach umnummerieren der Koordinaten auf $\mathbb{R}^m$ haben wir $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \neq 0$. Es gibt eine Umg. $V_1 \subset V$ von a, sd. $Df|_{V_1}$ konst. Rang n hat und wir können den Rangsatz anwenden.

$\Rightarrow \exists V \subset V_1$ von a und für $b = (b', b'') = f(a) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^m$ und stetig diffbare Abb. $h: W' \to \mathbb{R}^k$, sd. $f(V) = \{y = (y', y'') \in \mathbb{R}^m \mid y' \in W' \text{ und } y'' = h(y')\}$. Dann ist $W = W' \times \mathbb{R}^k$ und $g(y', y'') := y'' - h(y')$ die ges. Abb. $\square$

0x8.0xE Satz/Definition

Sei $M = f^{-1}(0) \subset U \subset \mathbb{R}^n$ das Urbild von 0 unter einer stetig diffb. Abb. $f: U \to \mathbb{R}^m$, $k = n - m \geq 0$. Sei f in a regulär ($Df(a)$ hat max. rg) und $g: V \to M \subset U \subset \mathbb{R}^n$ mit $V \subset \mathbb{R}^k$ offene Umg von 0 mit $g(0) = a$, eine lok. reguläre Parametrisierung von M. Dann gilt $T_a M := \operatorname{im}(Dg(0): \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n) = \ker(Df(a): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$. Man nennt den UR $T_a M \cong \mathbb{R}^k (\subset \mathbb{R}^n)$ den Tangentialraum von M in a.

Bem.: Üblicherweise zeichnet man den $T_a M \subset \mathbb{R}^n$ so an, dass $0 \in T_a M$ mit $a \in \mathbb{R}^n$ übereinstimmt.

Beweis: $f \circ g: V \to \mathbb{R}^m$ ist die Nullabb., da $g(V) \subset M = f^{-1}(0)$. $f \circ g \equiv 0$. Aus der Kettenregel folgt: $0 = D(f \circ g)(0) = Df(a) \cdot Dg(0)$. Dies zeigt: $\operatorname{im}(Dg(0)) \subset \operatorname{Ker}(Df(a)) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, \operatorname{grad}(f_i(a)) \rangle = 0\}$ (wobei $(f_1, \dots, f_m) = f$).

Andererseits sind beides UVR von $\mathbb{R}^n$, die, da g und f regulär (in 0 bzw a) sind, Dimension k bzw $n-m$.

haben $k=n-m$ impliziert die Gleichheit. $\square$

<u>0x8. 0x1. Satz</u> (Extrema mit Nebenbed.)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F: U \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, $m \leq n$ und $M = F^{-1}(0)$. Sei $a \in M$ ein Punkt, indem F regulär ist, und $h: U \to \mathbb{R}$ eine weitere stetig differenzierbare Fkt. Notw. dafür, dass $h|_M$ in a ein lok. Min/Max hat (d.h. $\exists V$ von a mit $h(x) \geq h(a)$ $\forall x \in V \cap M$ (lok. Min) analog Max.) ist dass $h(a) \in \langle \operatorname{grad} F_i(a) \rangle$ $\forall i$ liegt. Mit anderen Worten: $\operatorname{grad}(h(a)) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad}(F_i(a))$ gilt. λ_i werden Lagrange-Multiplikatoren genannt.

<u>Bem:</u> Die Bed. $\operatorname{grad}(h(a)) \in \langle \operatorname{grad}(F_i(a)) \rangle \Leftrightarrow \operatorname{grad}(h(a)) \perp T_a M$. $T_a M^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, \operatorname{grad}(F_i(a)) \rangle = 0\}$ heißt auch Normalenraum von $T_a M$ im $\mathbb{R}^n$.

<u>Beweis:</u> Sei $V \in \mathbb{R}^k$ offen, $k = n-m$ und $g: V \to M \subset U \subset \mathbb{R}^n$ eine lok. Param. von M mit $g(0) = a$. $h|_M$ hat lok. Ex. in $a \Leftrightarrow h \circ g: V \to \mathbb{R}$ hat in 0 ein lok. Ex. Mit Koord. $(t_1 \dots t_k)$ auf V ist also die Bed. $\frac{\partial (h \circ g)}{\partial t_j}(0)$ $\forall j = 1 \dots k$ notwendig. Nach Ket-Regel ist zu $0 = Dh(a) \cdot Dg(0) = \operatorname{grad}(h(a)) \cdot Dg(0)$. $\operatorname{grad}(h(a))$ ist eine $1 \times n$ Matrix, $Dg(0)$ eine $n \times k$ Matrix mit Spalten $\frac{\partial g}{\partial t_j}(0) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial t_j}(0)\right)_{j=1\dots k}^{i=1\dots n}$ d.h. $\langle \operatorname{grad}(h(a)), \frac{\partial g}{\partial t}(0) \rangle = 0$ ist notwendig. Die Vektoren $\frac{\partial g}{\partial t_j}(0)$ $j = 1 \dots k$ spannen den $T_a M$ auf nach 0x8. 0x1. d.h. $\operatorname{grad}(h(a)) \in T_a M^\perp = \langle \operatorname{grad}(F_i(a)) \rangle$ $(i = 1 \dots m)$ ist notwendig.

<u>Beispiel:</u> $M = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 = 1\}$, $h(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, $\operatorname{grad}(h(x)) = (a_i)$ $i = 1 \dots n$. $N_c(h)$ sind Hyperebenen: $\langle a, x \rangle = c$. $h|_M$ hat in $x = \frac{a}{\|a\|}$ lok. Ex. $\operatorname{grad}(h) = (a_1 \dots a_n) = \lambda \operatorname{grad}(F(x))$ $(F = \sum x^2) = \lambda \langle 2x_i \rangle \Rightarrow (a_i)$ und $(x_i) \in S^{n-1}$ sind abh. $\Rightarrow x = \pm \frac{a}{\|a\|}$.

08.07.11 Motivation

Wir haben gesehen, dass Lsg. eines diffb. GLS $M = \{ F_1(x) = 0 \dots F_m(x) = 0 \} \subset U \subset \mathbb{R}^n$ in reg. Punkten mit $k = n-m$ vielen Parametern lok. param. lassen. Die lok. Param. ist dabei eine lok. Umk. der Projektion von M auf geeignete Koordinaten $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$. Welche Projektion man wählen kann hängt davon ab, welche Minoren $DF(a) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a)\right)$ nicht verschwinden. Für die Kugeloberfläche $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ bekommen wir auf diese Weise $6 = 2 \cdot 3$ param. von Halbkugeln. Aber es gibt auch andere Param. z.B. Kugelkoord. $(\vartheta, \varphi) \mapsto (\cos(2\vartheta)\cos(\varphi), \cos(2\vartheta)\sin(\varphi), \sin(2\vartheta))$ $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\times]0; 2\pi[\to \mathbb{R}^3$. Diese Sit. taucht so häufig auf, dass sie einen Namen verdient.

08.07.12 Definition

(i) Ein top. Hausdorff-Raum M heißt n-dim. Mannigfaltigkeit, wenn es an jedem Punkt p eine offene Umg. $U = U(p) \subset M$ und eine bijektive in beiden Richt. stetige Abb. $\varphi: U \to V \subset \mathbb{R}^n$, wobei V offen ist. Man nennt das Paar (U, φ) eine Karte auf M und die Komp. von φ lok. Koord. Eine Kollektion $A = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ mit $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ nennt man einen Atlas von M.

08.07.13 Beispiel

a) S^{n-1} Sphäre.

b) Allgemein $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, c regulärer Wert, $M = F^{-1}(c)$ ist eine Mannigfaltigkeit der Dim. $n-1$ nach dem Satz über imp. Fkt.

Bem.: 1) Wohldef. der Dim (Mann.) ist nicht trivial.

2) In den Bsp. haben die Abb. (Umk.) $\psi = \varphi^{-1}: V \to U \subset M \subset \mathbb{R}^n$ eine zusätzliche Struktur, sind diffbar.

Für allg. (top.) Mannigfalt. macht die Forderung, dass ψ diffbar ist, keinen Sinn, da wir nicht wissen was eine "Abb. in einen top. Raum ist. ⇝

Ord. 9.14 Definition

Ein Atlas A einer Mannigfaltigkeit heißt diffbar, wenn an zwei Karten $\in A$ die Übergangsabb. $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ diffbar sind.

Eine weitere Karte (U, φ) von M heißt mit dem diffb. Atlas verträglich wenn auch die $\varphi_i \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_i \cap U) \to \varphi_i(U \cap U_i)$ in beiden Richtungen stetig diffbar ist. $\forall (U_i, \varphi_i) \in A$

Zu A ein diffb. Atlas auf M ist die $\tilde{A} = \{(U, \varphi)$ Karten von M; (die mit A verträglich sind) ist dann ebenfalls ein diffb. Atlas. $\tilde{A}$ ist max. Atlas. Eine diffbare MF der Dim n ist eine top. MF zsm mit einem diffb. max. Atlas.

Eine Abb. $F: M \to N$ zw. db. MF ist eine stetige Abb., sd. $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \underset{\mathbb{R}^n}{\varphi(U \cap F^{-1}(V))} \to \underset{\mathbb{R}^k}{\psi(V)}$ diffbar ist.