UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Funktionentheorie

Sommersemester 2016

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 12.00 Uhr, am 12.05.2016, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 3 — 04.05.2016

Aufgabe 1. Wir fassen

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}) \right\}$$

bezüglich der gewöhnlichen Addition und Multiplikation als Ring auf. Zeigen Sie die Isomorphie der folgenden Körper:

(i) S
(ii) $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$
(iii) $\mathbb{C}$

Aufgabe 2. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ genau dann in z_0 komplex differenzierbar ist, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) Für alle $v \in \mathbb{C}$ mit $|v| = 1$ existiert die Richtungsableitung

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + hv) - f(z_0)}{h}$$

und ist unabhängig von v.

(ii) Das reelle Differential

$$df : \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$$

von f in z_0 ist durch Multiplikation mit der komplexen Zahl $c = f'(z_0)$ gegeben.

Aufgabe 3. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine reell differenzierbare Abbildung. Sei ferner $f = g + ih$ die Zerlegung in Real- und Imaginärteil und

$$J_f^{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} f_z & f_{\overline{z}} \\ \overline{f}_z & \overline{f}_{\overline{z}} \end{pmatrix} \quad J_f^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} g_x & g_y \\ h_x & h_y \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $|J_f^{\mathbb{C}}| = |J_f^{\mathbb{R}}|$ und folgern Sie daraus: Ist f holomorph, f' stetig und $f'(z_0) \neq 0$ so ist f eine biholomorphe Abbildung einer Umgebung U_1 von z_0 auf eine Umgebung V_1 von $f(z_0)$.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu^k z^\nu$ (b) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \log(\nu) z^\nu$ (c) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\nu)!}{2^\nu (\nu!)^2} z^\nu$ (d) $\sum_{\nu=2}^{\infty} \tau(\nu) z^\nu$,

wobei $\tau(\nu)$ die Anzahl der Teiler von ν bezeichnet.