Mathematik für InformatikerInnen 2

Frank-Olaf Schreyer

Universität des Saarlandes, SS 2020

Anwendungen der Determinante

Die Themen heute sind

- Berechnung der Determinante
- Determinanten–Multiplikationssatz
- Blockmatrizen
- Formel für die inverse Matrix
- Cramersche Regel

In der letzten Vorlesung hatten wir die Determinante rigor0s eingeführt. Heute werden wir weitere Eigenschaften und einige Anwendungen kennenlernen.

Beispiel.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix} =$$

Gaußalgorithmus zur Berechnung der Determinante

Algorithmus.

Input. Eine $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$.

Output. $\det A \in K$.

1. Wir überführen die Matrix A in eine Matrix $\overline{A}$ in Zeilenstufenform (engl. row echolon form) durch Zeilenumformungen vom Typ III (Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen) und vom Typ IV (Vertauschung zweier Zeilen).
2. Ist k die Anzahl der Operationen vom Typ IV, die wir im ersten Schritt angewendet haben, dann geben wir
$$\det A = (-1)^k \prod_{(=1}^{n} \lambda_j$$
zurück, wobei $\lambda_1 = \overline{a}_{11}, \ldots, \lambda_n = \overline{a}_{nn}$ die Diagonaleinträge von $\overline{A}$ sind.

Beweis. Die Korrektheit folgt aus D6, D7 und D9. $\square$

Elementarmatrizen

Definition. Die Elementarmatrizen in $K^{n\times n}$ sind die Matrizen der Gestalt

$$M_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \lambda & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_i^j(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & \lambda & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda \neq 0$ ist und

$$P_i^j = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Satz. *Sei $A \in K^{m\times n}$. Die Multiplikation mit einer $m \times m$ Elementarmatrix von links*

$$A \mapsto M_i(\lambda), \quad A \mapsto E_i^j A \text{ und } A \mapsto P_i^j A$$

bewirkt eine Zeilenoperation vom Typ I, III bzw. IV. $\square$

Zerlegung in Elementarmatrizen

Lemma. *Sei* $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ *eine invertierbare Matrix. Dann existiert eine Folge* $C_1, \ldots, C_s$ *von* $n \times n$ *Elementarmatrizen so dass*

$$C_1 C_2 \cdots C_s = A$$

gilt

Beweis. Nach dem Gaußalgorithmus existiert eine Folge von elementaren Zeilenumformungen, die die erweiterte Matrix $(A|E)$ in $(E|A^{-1})$. überführt. Entsprechen diese Umformungen den Multiplikationen mit den Elementarmatrizen $B_1, \ldots B_s$ so gilt

$$B_s \cdots B_1 = A^{-1}.$$

Da Elementarmatrizen invertierbar sind,

$$(M_i(\lambda))^{-1} = M_i(\lambda^{-1}), (E_i^j(\lambda))^{-1} = E_i^j(-\lambda) \text{ und } (P_i^j)^{-1} = P_i^j,$$

folgt $A = C_1 \ldots C_s$ für $C_k = B_k^{-1}$. □

Ende Teil 1

Determinantenmultiplikationssatz

Satz. *Für quadratische Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ gilt:*

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Beweis. Zunächst nehmen wir an, dass der **Rang** von A

$$\operatorname{rang}(A) := \dim \operatorname{Bild}(A) := \dim \operatorname{Bild}(K^n \to K^n,\ x \mapsto Ax) < n$$

nicht maximal ist, d.h., A ist nicht invertierbar. Wegen $\operatorname{Bild}(A \cdot B) \subset \operatorname{Bild}(A)$ ist auch $\operatorname{rang}(A \cdot B) < n$. Mit D10 (eine Matrix A ist invertierbar genau dann, wenn $\det A \neq 0$ gilt) folgt

$$\det A \cdot B = 0 = \det A \cdot \det B.$$

Sei nun $\operatorname{rang} A = n$, also $A \in \mathrm{GL}(n, k)$. Nach dem Lemma existiert eine Zerlegung

$$A = C_1 \cdot C_2 \cdots C_s$$

in Elementarmatrizen.

Mit Induktion nach s reicht es daher, die Behauptung in dem Spezialfall, dass A eine Elementarmatrix ist, zu zeigen. Es gilt

$$\det(M_i(\lambda)B) \overset{D1b}{=} \lambda \det B = \det(M_i(\lambda)) \det B,$$

$$\det(E_i^j(\lambda)B) \overset{D7}{=} \det B = \det E_i^j(\lambda) \det B,$$

und

$$\det(P_i^j B) \overset{D6}{=} -\det B = \det P_i^j \det B.$$

Damit ist der Satz für den Spezialfall, dass A eine Elementarmatrix ist, bewiesen.

Wir formulieren die vollständige Induktion nun ausführlich:

Wir zeigen mit Induktion nach s für eine Matrix $A = C_1 C_2 \ldots C_s$ zwei Behauptungen:

$$\det A = \prod_{k=1}^{s} \det C_k \quad \text{und} \quad \det(AB) = \left(\prod_{k=1}^{s} \det C_k \right) \det B,$$

welche zusammen den Determinantenproduktsatz implizieren.

Induktionsanfang: Für $s = 1$ haben wir dies gerade gezeigt.
Induktionsschritt $s \to s + 1$: Sei nun $A = C_1 \dots C_s C_{s+1}$ ein Produkt von $s + 1$ Elementarmatrizen. Dann gilt $A = C_1 A'$, wobei $A' = C_2 \dots C_{s+1}$ ein Produkt von s Elementarmatrizen ist.
Nach der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\det A' = \prod_{k=2}^{s+1} \det C_k \text{ und } \det(A' \cdot B) = \left(\prod_{k=2}^{s+1} \det C_k \right) \det B.$$

Mit demSpezialfall folgt

$$\det A = \det(C_1 A') = \det C_1 \det A' \overset{\text{I.V.}}{=} \det C_1 \prod_{k=2}^{s+1} \det C_k$$

und

$$\det(AB) = \det(C_1 A' B) = \det C_1 \det(A' B) \overset{\text{I.V.}}{=} \det C_1 \prod_{k=2}^{s+1} \det C_k \det B.$$

Korollar. *Für quadratische Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ gilt:*

$$\det(AB) = \det(BA).$$

Beweis. $\det(AB) = \det A \det B = \det B \det A = \det(BA)$, da die Multiplikation in K kommutativ ist. $\square$

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bemerkung. Im Allgemeinen ist

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B).$$

Satz. *Für jede Matrix $A \in K^{n\times n}$ gilt:*

$$\det A^t = \det A.$$

Beweis. Ist $A = (a_{ij})$, so ist $A^t = (a'_{ij})$ mit $a'_{ij} = a_{ji}$. Mit der Formel für die Determinante

$$\begin{aligned}\det A^t &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma \; a'_{1,\sigma(1)}\cdots a'_{n,\sigma(n)}\\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma \; a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}.\end{aligned}$$

Für jedes $\sigma \in S_n$ gilt:

$$a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n} = a_{1,\sigma^{-1}(1)}\cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)},$$

denn beide Produkte haben die gleichen Faktoren (möglicherweise in anderer Reihenfolge), denn ist $j = \sigma(i)$, so gilt
$(\sigma(i), i) = (j, i) = (j, \sigma^{-1}(j))$.
Außerdem ist

$$\operatorname{sign}\sigma = \operatorname{sign}\sigma^{-1},$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\det A^t &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma^{-1}\; a_{1,\sigma^{-1}(1)}\cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}\\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma\; a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{n,\sigma(n)}\\ &= \det A,\end{aligned}$$

da mit σ auch σ^{-1} ganz S_n durchläuft.
(Die Abbildung $S_n \to S_n,\ \sigma \mapsto \sigma^{-1}$ ist bijektiv.) $\square$

Bemerkung. Die Regeln D1, D2, D5, D6, D7, D10 gelten sinngemäß auch für Spalten, D9 auch für untere Dreiecksmatrizen.

Determinanten von Blockmatrizen

Satz. *Sei $n = n_1 + n_2$ und $A \in K^{n\times n}$ in der Form*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

mit $A_1 \in K^{n_1\times n_1}$, $A_2 \in K^{n_2\times n_2}$, $C \in K^{n_1\times n_2}$ und $n = n_1 = n_2$.
Dann gilt:

$$\det(A) = \det(A_1) \cdot \det(A_2).$$

Beweis. Wir bringen A_1 und A_2 in Zeilenstufenform $\overline{A}_1$ und $\overline{A}_2$. Dies Zeilenoperationen auf A angewendet, überführt A in eine obere Dreiecksmatrix

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{A}_1 & \overline{C} \\ 0 & \overline{A}_2 \end{pmatrix}$$

und die Behauptung folgt mit D9. □

Beispiel.

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&0&0&6\\7&0&0&8\\9&10&11&12\end{pmatrix} &\overset{2xD6}{=} \det\begin{pmatrix}1&2&3&4\\9&10&11&12\\5&0&0&6\\7&0&0&8\end{pmatrix} \overset{D6}{=} \\
-\det\begin{pmatrix}3&2&1&4\\11&10&9&12\\0&0&5&6\\0&0&7&8\end{pmatrix} &\overset{Blockmatrix}{=} -\det\begin{pmatrix}3&2\\11&10\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix} \\
&= -(30-22)(40-42) = 16
\end{aligned}
$$

Komplementärmatrix

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$. Mit A_{ij} bezeichnen wir die Matrix, die aus A entsteht, indem man a_{ij} durch 1 ersetzt, und alle anderen Einträge in Zeile i und Spalte j durch 0 ersetzt:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{i-1,1} & & & 0 & & & a_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+1,1} & & & 0 & & & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\tilde{A} = (\tilde{a_{ij}}) \in K^{n\times n}$mit $\tilde{a_{ij}} = \det A_{ji}$ heißt **komplementäre Matrix** zu A. Man beachte die umgekehrte Reihenfolge der Indices.

Ende Teil 3

Mit

$$A'_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \widehat{a_{1,j}} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \widehat{a_{i,1}} & \dots & \widehat{a_{i,j}} & \dots & \widehat{a_{i,n}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \widehat{a_{n,j}} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

bezeichnen wir die Matrix, die durch Streichen der i–ten Zeile und der j–ten Spalte von A entsteht (nicht vorhandene Einträge werden hier mit einem $\widehat{\ }$ gekennzeichnet).

Bemerkung. Es gilt:

$$\det A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A'_{ij}.$$

Beweis. Durch $(i-1)$ Vertauschungen benachbarter Zeilen und $(j-1)$ Vertauschungen benachbarter Spalten lässt sich A_{ij} überführen in:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Der Satz über die Blockmatrizen gibt die Behauptung:

$$\det A_{ij} = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \det A'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A'_{ij}. \qquad \square$$

Satz. *Sei $A \in K^{n \times n}$ und $\tilde{A}$ die komplementäre Matrix. Dann gilt:*

$$\tilde{A} \cdot A = A \cdot \tilde{A} = \det(A) \cdot E_n = \begin{pmatrix} \det A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det A \end{pmatrix}.$$

Korollar. *Ist A invertierbar, dann ist*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$$

die inverse Matrix. $\square$

Bemerkung. Aus der Formel folgt insbesondere, dass sich jeder Eintrag von A^{-1} als rationaler Ausdruck in den Einträgen von A darstellen lässt. Mit Hilfe der mehrdimensionalen Analysis kann man folgern, dass die Abbildung

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \; A \mapsto A^{-1}$$

differenzierbar (insbesondere stetig) ist.

Beweis des Satzes. Seien $a^1, \dots, a^n$ die Spaltenvektoren von A und e^i der i-te Einheitsvektor. Sei $(a^1 \dots a^{j-1} e^i a^{j+1} \dots a^n)$ die Matrix, die aus A durch Ersetzen der j–ten Spalte durch e^i entsteht. Dann gilt:

$$(*) \quad \det(a^1 \dots a^{j-1} e^i a^{j+1} \dots a^n) = \det A_{ij},$$

denn man kann A_{ij} durch Typ III–Spaltenumformungen erhalten. Sei $\tilde{A} \cdot A = (c_{ik})$, dann ist:

$$\begin{aligned}
c_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \cdot a_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \cdot \det A_{ji} \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \cdot \det(a^1 \dots a^{i-1} e^j a^{i+1} \dots a^n) \\
&\overset{D1}{=} \det(a^1 \dots a^{i-1}\ a^k\ a^{i+1} \dots a^n) \qquad (\text{da } \sum_{j=1}^{n} a_{jk} e^j = a^k \text{ gilt}) \\
&= \delta_{ik} \cdot \det A \qquad (\delta_{ik} \text{ das Kroneckersymbol}).
\end{aligned}$$

Die Gleichung $A \cdot \tilde{A} = \det A \cdot E_n$ beweist man analog. □

Entwicklungssatz von Laplace

Korollar. *Ist $n \geq 2$ und $A \in K^{n \times n}$, so gilt für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A'_{ij} \quad \text{(Entwicklung nach der } i\text{–ten Zeile)}$$

und für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A'_{ij} \quad \text{(Entwicklung nach der } j\text{–ten Spalte).}$$

Beweis. Nach Satz über die Komplementärmatrix ist $\det A$ gleich dem i–ten Diagonaleintrag von $A \cdot \tilde{A}$:

$$\begin{aligned} \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \tilde{a}_{ji} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \det A_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det A'_{ij} \qquad \square \end{aligned}$$

Beispiel.

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} &= 0\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\cdot 3\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad +1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 0 - 3\cdot(-4) + 1\cdot(-3) = 9
\end{aligned}$$

Die durch $(-1)^{i+j}$ bewirkte Vorzeichenverteilung kann man sich als Schachbrettmuster vorstellen:

+	-	+	-
-	+	-	+
+	-	+	-
-	+	-	+

Cramersche Regel

Satz. *Seien $A \in \mathrm{GL}(n,K)$ mit Spalten $a^1, \ldots, a^n$ und $b \in K^n$. Sei ferner $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in K^n$ die eindeutige Lösung von $Ax = b$. Dann gilt für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$:*

$$x_i = \frac{\det(a^1 \ldots a^{i-1} \; b \; a^{i+1} \ldots a^n)}{\det A}.$$

Beweis. Die Lösung ist $x = A^{-1}b$. Nach der Formel für die Inverse hat A^{-1} in der i–ten Zeile und j–ten Spalte den Eintrag

$$\frac{\det A_{ij}}{\det A} = \frac{1}{\det A} \det(a^1 \ldots a^{i-1} \; e^j \; a^{i+1} \ldots a^n).$$

Daher folgt für die i-te Komponente von x:

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\det A} \cdot \det(a^1 \ldots a^{i-1} \; e^j \; a^{i+1} \ldots a^n) \cdot b_j \\ &= \frac{1}{\det A} \cdot \det(a^1 \ldots a^{i-1} \; \sum_{j=1}^{n} b_j e^j \; a^{i+1} \ldots a^n). \end{aligned}$$

$\square$

Ende Teil 4

Beispiel.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Cramersche Regel liefert nun, da $\det A = -1$ ist:

$$x_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} / -1 = \frac{0}{-1} = 0,$$

$$x_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} / -1 = \frac{1}{-1} = -1,$$

$$x_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} / -1 = \frac{-2}{-1} = 2.$$