Mathematik für InformatikerInnen 2

Frank-Olaf Schreyer

Universität des Saarlandes, SS 2020

Die Determinante

Die Themen heute sind

- Was ist die Determinante?
- Existenz und Eindeutigkeit der Determinante
- Eigenschaften der Determinante
- Die S_n-Entwicklung der Determinante

Heute wollen wir jeder quadratischen Matrix $A \in K^{n \times n}$ ein Skalar $\det A \in K$ zuordnen. Einer der wesentlichen Eigenschaften wird sein:

$$\det A \neq 0 \iff A \text{ is invertierbar.}$$

Was ist die Determinante?

Aus der Schule kennen sie vielleicht die Formel für die Determinante einer 2×2-Matrix:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

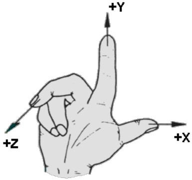
Geometrisch lässt sich die Determinante im Fall $K = \mathbb{R}$ wie folgt definieren: Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix mit Zeilenvektoren $a_i = (a_{i1} \dots a_{in})$. Dann ist bis auf das Vorzeichen

$$\det A = \pm \operatorname{Vol}(\{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mid \lambda_i \in [0,1]\}),$$

das **Volumen des Parallelotops**, das durch $a_1, \dots, a_n$ aufgespannt wird.

Was ist die Determinante?

Im Fall $n = 3$ lässt sich auch das Vorzeichen mit der **rechte/linke Handregel** interpretieren. Wenn wir die Richtungen der Vektoren a_1, a_2, a_3 mit dem Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger darstellen, und dabei die rechte Hand bevorzugen, ist das Vorzeichen $+$, sonst ist es $-$.



Nachteil dieser Definition ist, dass wir dafür einen Volumenbegriff im $\mathbb{R}^n$ benötigen. Außerdem ist es unklar, ob für endliche Körper dieser Ansatz überhaupt einen Sinn ergibt. Wir gehen deshalb anders vor.

Definition und Satz. *Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Dann gibt es genau eine Abbildung*

$$\det\colon K^{n\times n} \to K, \quad A \mapsto \det A,$$

gelegentlich auch $|A| := \det A$ *geschrieben, die die folgenden drei Eigenschaften D1, D2 und D3 hat.*

D1) det *ist* **linear in jeder Zeile**. *Genauer:*

1. *Ist $a_i = a_i' + a_i''$, dann gilt*

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i' \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i'' \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

2. *Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Dabei deuten die Punkte $\vdots$ an, dass diese Zeilen überall die gleichen sind.

D2) det *ist* **alternierend**, *d.h.,*

$$\det A = 0,$$

falls A zwei gleiche Zeilen hat.

D3) det *ist* **normiert**, *d.h., für die Einheitsmatrix $E_n \in K^{n\times n}$ gilt:*

$$\det E_n = 1.$$

D1 ist durch unsere Volumen-Interpretation der Determinante motiviert: In $\mathbb{R}^2$ ist die Summe der Flächeninhalte der ersten beiden Parallelogramme die Fläche des dritten:

Auch D2 ist geometrisch motiviert: In diesem Fall ist das Parallogramm entartet, hat also keine Fläche.

Ende Teil 1

Schließlich D3 ist lediglich eine Konvention. Sicherlich ist es vernünftig, dem **Einheitsquadrat** ($n = 2$) bzw. dem **Einheitswürfel** ($n = 3$), jeweils mit Seitenlängen 1, das Volumen 1 zu geben.

Um den Satz zu beweisen, müssen wir die Existenz und Eindeutigkeit der Abbildung

$$\det\colon K^{n\times n} \to K,\ A \mapsto \det A$$

mit den Eigenschaften D1, D2 und D3 zeigen. Wir beginnen mit der Eindeutigkeit, indem wir weitere Regeln für die Determinante aus D1, D2 und D3 herleiten.

Folgerungen aus den Eigenschaften D1, D2 und D3

D4) Für jedes $\lambda \in K$ gilt:

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A.$$

Dies folgt sofort aus D1b, da wir n Zeilen mit einem Faktor λ in λA haben.

D5) Gibt es ein i mit $a_i = (0, \ldots, 0)$, dann ist (wegen D1b):

$$\det A = 0.$$

D6) Wenn B aus A durch Vertauschung von genau 2 Zeilen entsteht, dann gilt: $\det B = -\det A$. Anders gesagt:

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Beweis von D6.: Nach D2 und D1 gilt:

$$\det\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$+ \det\begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = 0$$

$\square$

D7) Ist $\lambda \in K$ und entsteht B aus A durch Addition des λ-fachen der i–ten Zeile zur j–ten, dann ist $\det B = \det A$:

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j + \lambda a_i \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Beweis.

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j + \lambda a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{D1}{=} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{D2}{=} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\square$

D8) Es sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation. $e_1, \ldots, e_n \in K^n$ bezeichne die kanonischen Basisvektoren von K^n (als Zeilenvektoren). Dann gilt für die Determinante der sogenannten **Permutationsmatrix**:

$$\det \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \operatorname{sign}(\sigma).$$

Beweis. Ist τ eine Transposition und σ eine Permutation, dann geht die Permutationsmatrix zu σ durch eine Vertauschung von genau zwei Zeilen in die Permutaionsmatrix zu $\tau\sigma$ über. Daraus folgt:

$$\det \begin{pmatrix} e_{\tau\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{\tau\sigma(n)} \end{pmatrix} \overset{D6}{=} -\det \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix}. \text{ Also } \det \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = (-1)^k,$$

falls $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$ eine Komposition von k Transpositionen ist. $\square$

Bemerkung. Permutationsmatrizen sind orthogonale Matrizen, da die Einheitsvektoren senkrecht zueinander stehen. Mit der Notation $\mathrm{SO}(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$ gilt nach D8:

$$\begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(n) \;\Leftrightarrow\; \sigma \in A_n.$$

D9) Ist A eine **obere Dreiecksmatrix**, d.h.,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

so ist $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

Ende Teil 2

D9) Ist A eine **obere Dreiecksmatrix**, d.h.,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

so ist $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

Beweis. Sei $\lambda_i = 0$ für ein $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Durch elementare Zeilenumformungen vom Typ III und IV kann man A in eine Matrix $\overline{A}$ überführen, die in Zeilenstufenform ist. Deren letzte Zeile ist eine Nullzeile, so dass $\det \overline{A} = 0$ (nach D5).
Andererseits ist nach D6 und D7:

$$\det A = \pm \det \overline{A}.$$

Also ist $\det A = 0$ und die Behauptung ist im Fall, dass ein $\lambda_i = 0$ ist, bewiesen.

Wir müssen D9 nun noch für den Fall zeigen, dass $\lambda_i \neq 0 \; \forall \; i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt. Hat A diese Eigenschaft, so gilt nach D1b:

$$\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n \cdot (\det B),$$

wobei B von der Form

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Da man B durch Zeilenumformungen vom Typ III in die Einheitsmatrix überführen kann, ist

$$\det B \overset{D6}{=} \det E_n \overset{D3}{=} 1.$$

Die Behauptung folgt. $\square$

D10) Äquivalent sind:

1. $\det A \neq 0$,
2. $A \in GL(n, K)$,
3. Die Zeilen $a_1, \ldots, a_n \in K^n$ von A sind linear unabhängig.

Beweis. Wieder können wir durch elementare Zeilenumformungen vom Typ III und IV die $n \times n$ Matrix A in eine Matrix $\overline{A}$ überführen, die Zeilenstufenform hat. Es gilt nach D6 und D7:

$$\det A = \pm \det \overline{A}.$$

$\overline{A}$ ist eine obere Dreiecksmatrix. Nach D9 ist deren Determinante genau dann $\neq 0$, wenn alle Diagonaleinträge $\neq 0$ sind, d.h., wenn es genau n Stufen gibt. Andererseits ist die quadratische $n \times n$ Matrix A genau dann invertierbar ist, wenn $\operatorname{rang} A = n$ gilt, also $\overline{A}$ genau n Stufen hat. Daher sind 1. und 2. äquivalent.

Die Äquivalenz zur dritten Aussage folgt, da die Zeilen von $\overline{A}$ genau dann linear unabhängig sind, wenn alle Diagonaleinträge $\neq 0$ sind, und genau dann sind auch die Zeilen von A linear unabhängig. $\square$

Korollar (Eindeutigkeit der Determinante). *Durch die Bedingungen D1, D2 und D3 ist die Abbildung*

$$\det\colon K^{n\times n} \to K$$

eindeutig festgelegt.

Beweis. Wir können A durch elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform bringen, was nur das Vorzeichen eventuell ändert. Mit D9 folgt die Behauptung.

Satz (Formel für die Determinante). *Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Es gibt genau eine Abbildung*

$$\det\colon K^{n\times n} \to K,$$

die die Bedingungen D1-D3 erfüllt. Nämlich für $A = (a_{ij})$ gilt:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Ende Teil 3

Beweis. Die Eindeutigkeit haben wir bereits eben im Korollar gesehen. Wir zeigen nun zunächst, dass, falls eine solche Abbildung existiert, diese die angegebene Formel erfüllen muss. Auch dies folgt aus D1-D3: Schreiben wir nämlich für $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ die i–te Zeile als Linearkombination der Standardbasisvektoren (als Zeilenvektoren!), nämlich $a_i = a_{i1}e_1 + \cdots + a_{in}e_n$, so ergibt die Regel D1 (Linearität in den Zeilen):

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} &= \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} \cdot \det\begin{pmatrix} e_{j_1} \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\
&= \cdots = \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_n=1}^{n} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n} \cdot \det\begin{pmatrix} e_{j_1} \\ \vdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wenn die Abbildung

$$j\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}, \quad i \mapsto j_i$$

nicht injektiv ist, dann gilt

$$\det \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ \vdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix} = 0,$$

weil zwei gleiche Zeilen vorkommen (D2). Von den ursprünglich n^n Summanden sind also höchstens jene $n!$ von Null verschieden, die zu bijektiven Abbildungen j gehören, d.h., zu Permutationen aus S_n. Wir erhalten:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \cdot \det \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix}.$$

D8 liefert nun:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Bemerkung. Die Formel ist meist nur für sehr kleine n zur tatsächlichen Berechnung einer Determinante nützlich, denn die Summe besteht aus $n!$ Summanden:

Beispiele.

n=1:

$$\det A = \det\left(a_{11}\right) = a_{11}.$$

2.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}.$$

3. Die **Regel von Sarrus** besagt:

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} \\
&\quad - a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11} - a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}.
\end{aligned}$$

Beweis der Existenz.

Um die Existenz der Determinantenabbildung einzusehen, zeigen wir, dass die durch die Formel definierte Abbildung $\det\colon K^{n\times n} \to K$ tatsächlich die Bedingungen D1, D2 und D3 erfüllt:

D1a) Sei $a_i = a_i' + a_i''$, d.h., $a_{ij} = a_{ij}' + a_{ij}''$. Es folgt:

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i' + a_i'' \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots (a_{i\sigma(i)}' + a_{i\sigma(i)}'') \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)}' \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum \cdots a_{i\sigma(i)}'' \cdots$$

$$= \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i' \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i'' \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

D1b) In jedem Summanden haben wir λ im i–ten Faktor.

D2) Angenommen die k-te und ℓ-te Zeile von A sind gleich, $k \neq l$. Wir setzen: $\tau := (k\ell) \in S_n$. Dann ist:

$$S_n = A_n \cup A_n\tau,$$

da $|A_n| = \frac{n!}{2} = |A_n\tau|$ und die Vereinigung disjunkt ist. Wenn σ die Gruppe A_n durchläuft, so durchläuft $\sigma \circ \tau$ die Menge $A_n\tau$. Also gilt:

$$\det A = \sum_{\sigma \in A_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} - \sum_{\sigma \in A_n} a_{1\sigma(\tau(1))} \cdots a_{n\sigma(\tau(n))}.$$

Da die k–te und ℓ–te Zeile von A gleich sind und da außerdem die Multiplikation in K kommutativ ist, können wir die Summanden der rechten Seite nach Definition von τ umformen:

$$\begin{aligned} & a_{1\sigma(\tau(1))} \cdots a_{k\sigma(\tau(k))} \cdots a_{l\sigma(\tau(l\ell))} \cdots a_{n\sigma(\tau(n))} \\ &= a_{1\sigma(1)} \cdots a_{k\sigma(\ell)} \cdots a_{\ell\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= a_{1\sigma(1)} \cdots a_{\ell\sigma(\ell)} \cdots a_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= a_{1\sigma(1)} \cdots a_{k\sigma(k)} \cdots a_{\ell\sigma(\ell)} \cdots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

Also heben sich die beiden Summen gegeneinander auf.

D3) Es gilt für die Einheitsmatrix $E_n = (\delta_{ij})$:

$$\begin{aligned} \det E_n &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \delta_{1\sigma(1)} \cdots \delta_{n\sigma(n)} \\ &= \operatorname{sign}(\mathrm{id}) \cdot \delta_{11} \cdots \delta_{nn} = 1. \end{aligned}$$

Die Summe kollabiert hier auf einen einzigen Summanden, da in jedem anderen der $n!$ Summanden wenigstens ein Faktor 0 auftritt.

Damit ist der Satz über die Existenz und Eindeutigkeit der Determinante vollständig bewiesen. Die Eigenschaften D4 - D10 der Determinante sind damit auch bewiesen. $\square$

Ende Teil 4

Beispiel.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix} =$$