Fakultät MI, Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Dr. Michael Hoff

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Übungen zur Vorlesung Mathematik für InformatikerInnen 2

Sommersemester 2020

Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt per Email bis zum **01.07.2020, 10 Uhr** vor der Vorlesung. Senden Sie Ihre Lösungen an den Tutor Ihrer Übungsgruppe. Auf der Vorlesung-homepage finden Sie die Emailadressen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung sind auf der Seite unserer Arbeits-gruppe unter *Teaching* zu finden: www.math.uni-sb.de/ag/schreyer/

Blatt 8 — 24.06.2020

Aufgabe 1 (Determinante)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien ferner $x, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \Bbbk$. Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} x & -1 & & & 0 \\ 0 & x & -1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & x + a_{n-1} \end{pmatrix} = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Aufgabe 2 (Gerschgorin-Kreise)**.** Gegeben sind die folgenden drei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Gerschgorin-Kreisscheiben der Matrizen und zeichnen Sie diese jeweils in ein eigenes Koordinatensystem. Wo liegen die Eigenwerte der Matrizen?

Aufgabe 3 (Orthogonale Projektion)**.** Sei $\mathbb{R}^4$ mit dem standard Skalarprodukt versehen. Seien

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Orthonormalisieren Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren die Basis w_1, w_2, w_3, w_4 von $\mathbb{R}^4$.

(b) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $U_2 = \langle w_1, w_2 \rangle$.

Aufgabe 4 (Orthonormalisierungsverfahren).
Betrachten Sie auf $\mathbb{R}[X]$ die folgenden beiden Skalarprodukte

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle_1 &= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)x^2 dx, \\ \langle p, q \rangle_2 &= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)(1-x^2) dx. \end{aligned}$$

(a) Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf $\{1, x, x^2, x^3\}$ bezüglich beider Skalarprodukte an.

(b) Bestimmen Sie bezüglich beider Skalarprodukte die orthogonale Projektion $\pi(f)$ von $f = x^2(x^2 - 1) \in \mathbb{R}[x]$ auf $U = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ und fertigen Sie Zeichnungen von f und $f - \pi(f)$ an (z. B. mit Maple).