UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp, Michael Hahn

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Informatiker 1

Wintersemester 2013/14

Dieses Übungsblatt wird nicht mehr abgegeben und bewertet.

Ferienblatt 29. Januar 2014

Aufgabe 1 (Taylorpolynom)**.** Bestimmen Sie ohne Computer das Taylorpolynom 2. Grades von

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \ln(\sin(x))$ im Punkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$
(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = e^{\sqrt{x}}$ im Punkt $x_0 = 1$

Aufgabe 2 (Taylorreihe)**.** Berechnen Sie die Taylorreihe von

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x+1)}$$

im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
Zeigen Sie mit Hilfe von Partialbruchzerlegung, dass die Taylorreihe auf dem offenen Intervall $(-1, 1)$ gegen f konvergiert.

Aufgabe 3 (Taylorpolynome mit Computeralgebra)**.** Berechnen Sie mit *Maple* die Taylorpolynome T_0^k der Ordnung $k = 1, ..., 6$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ für

(a) $f(x) = \tan(x)$
(b) $f(x) = \sqrt{1+x}$

und plotten Sie die Graphen von f und der Taylorpolynome.

Aufgabe 4 (Uneigentliche Integrale)**.** Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$ für die das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(\ln x)^s} dx$$

existiert.

Aufgabe 5 (Reihen)**.** Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ für die die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

konvergiert und geben Sie in diesen Fällen den Grenzwert an.

Aufgabe 6 (Grenzwerte)**.** Überprüfen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert

(a) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x)(x - \frac{\pi}{2})$
(b) $\lim_{x \to 0} \ln(x) e^{-x}$
(c) $\lim_{x \to \infty} \ln(x) e^{-x}$
(d) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{e^x}}{e^{\sqrt{x}}}$

Aufgabe 7 (Arithmetische und geometrische Mittel)**.** Seien $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ mit $0 < a_0 < b_0$. Die Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ seien rekursiv definiert durch

$$a_{i+1} = \sqrt{a_i b_i} \quad \text{und} \quad b_{i+1} = \frac{a_i + b_i}{2}.$$

Zeigen Sie, dass die beiden Folgen konvergieren und ihre Grenzwerte übereinstimmen.

Aufgabe 8 (Induktion)**.**

(a) Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ die folgende Formel gilt:

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right).$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ die folgende Formel gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n+k)(n-k) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

Aufgabe 9 (Logik)**.**
Die drei Studenten Amann, Bemann und Cemann diskutieren über die Lösung einer Übungsaufgabe. Alle drei haben unterschiedliche Ansätze zur Lösung der Aufgabe. Die Drei wissen nicht, welche ihrer Lösungen sie abgeben sollen und fragen ihren Übungsgruppenleiter um Rat. Der Übungsgruppenleiter will den Studenten nicht zuviel verraten und gibt ihnen lediglich den folgenden Hinweis.

- Wenn Cemann die Aufgabe richtig gelöst hat, dann hat Bemann die Aufgabe falsch.
- Wenn Bemann die Aufgabe richtig oder Amann die Aufgabe falsch hat, dann hat Cemann die Aufgabe richtig.
- Wenn Bemann oder Amann die Aufgabe richtig haben, dann hat Cemann die Aufgabe falsch gelöst.

Entscheiden Sie, welche Lösung die Studenten abgeben sollten.

Aufgabe 10 (Extremwerte)**.** Aus einem rechteckigen Stück Blech der Seitenlänge 16cm und Höhe 10cm werden an den Ecken deckungsgleiche Quadrate ausgeschnitten (siehe Skizze). Das restliche Blech wird zu einer Schachtel zurechtgebogen.
Wie groß muss die Seitenlänge der Quadrate sein, damit das Volumen der Schachtel maximal wird.