UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp, Michael Hahn

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Informatiker 1

Wintersemester 2013/14

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 04.12.2013 **vor der Vorlesung** abzugeben.

Blatt 7 — 27. November 2013

Aufgabe 1 (Konvergenz von Folgen)**.** Wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch $a_0 = 1$ und

$$a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}} \quad \forall n \geq 1.$$

Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert. (Hinweis: Berechnen Sie zuerst den hypothetischen Grenzwert.)

Aufgabe 2 (Infimum und Supremum)**.** Seien

$$M_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subset \mathbb{R} \text{ und } M_2 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2\} \subset \mathbb{R}.$$

Welche dieser Mengen besitzt ein Supremum, welche ein Infimum? Geben Sie es jeweils an, wenn es existiert.

Aufgabe 3 (Abzählbarkeit)**.** Zeigen Sie:

(a) Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.
(b) Die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.

Aufgabe 4 (Grenzwerte von Reihen)**.** Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und geben Sie, falls er existiert, den Grenzwert an:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^{n+1}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2 - 3n + 1}$

Zusatzaufgabe. Sei $\mathbb{R} := \{\text{gut gewählte Dedekindsche Schnitte}\} \subset 2^{\mathbb{Q}} \times 2^{\mathbb{Q}}$ die Menge der reellen Zahlen.

(a) Definieren Sie die Anordnungsrelation sowie eine Addition auf den Dedekindschen Schnitten.
(b) Sei $((U^{(n)}, V^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von gut gewählten Dedekindschen Schnitten. Definieren Sie den Begriff *nach unten beschränkt*.
(c) Zeigen Sie, dass eine monoton fallende, beschränkte Folge $((U^{(n)}, V^{(n)}))_n$ konvergent in $\mathbb{R}$ ist und bestimmen Sie den Grenzwert.