UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Vorlesung Analysis 3

Wintersemester 2015/16

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 12.00 Uhr, am 07.01.2016, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 9 17.12.2015

Aufgabe 1. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert das Integral

$$\int_{B_1^n} \frac{1}{||x||^\alpha},$$

wobei B_1^n die Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Aufgabe 2. (a) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ z^2 \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche des Zylinderausschnittes

$$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq b\}$$

(b) Es sei

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1, x > 0, y > 0\}.$$

und

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\int_G \mathrm{div} F dx = 0, \quad \text{und} \quad \int_{\partial G} \langle F, \nu \rangle dS = \frac{\pi}{2}.$$

Begründen Sie, warum dies kein Widerspruch zum Integralsatz von Gauß ist.

Aufgabe 3. Für ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ definieren wir

$$K_r := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,K) \leq r\}.$$

(a) Sei K der abgeschlossene Einheitswürfen im $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie das Volumen $v(K_r)$ als Funktion von r.

(b) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexes Kompaktum mit glattem Rand.
Zeigen Sie, dass $v(K_r)$ ein Polynom vom Grad n in r ist, und die Formel:

$$v_n(K_r) = v_n(K) + r v_{n-1}(\partial K) + \cdots + r^n v_n(B_1^n).$$

Aufgabe 4 (Der Sierpinski Weihnachtsbaum)**.** Abgabe bis zum 14.01.2016 erlaubt.
Das Sierpinski-Dreieck ist folgendermaßen definiert:

(1) Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck Δ^0.
(2) Durch das Verbinden der Seitenmittelpunkte des Dreiecks entstehen vier Deckungsgleiche Dreiecke

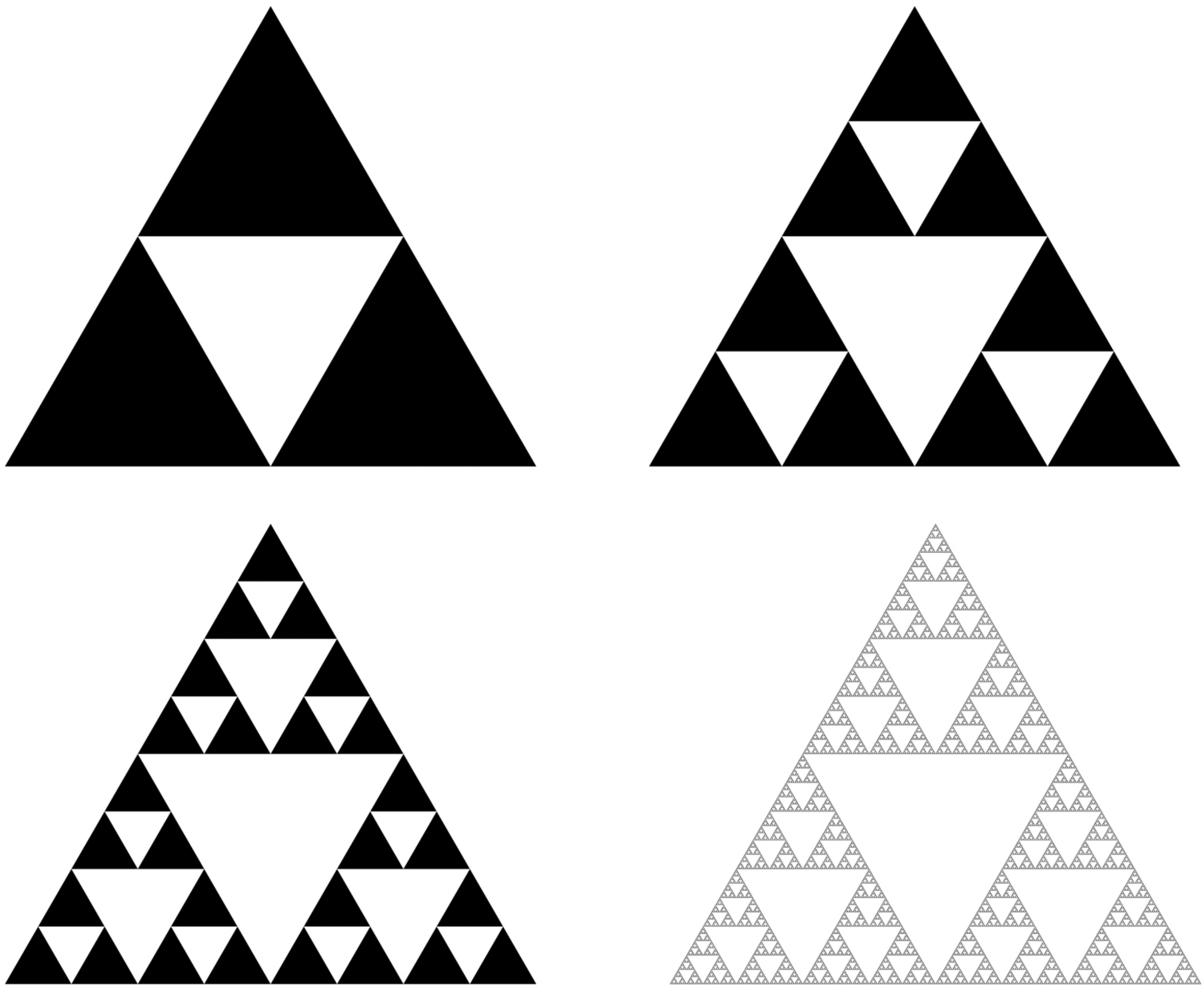
$$\Delta^0 = \Delta_{\text{oben}} \cup \Delta_{\text{rechts}} \cup \Delta_{\text{links}} \cup \nabla_{\text{mitte}}.$$

(3) Entferne das mittlere der vier Teildreiecke um

$$\Delta^1 = \Delta^0 \setminus \mathring{\nabla}_{\text{mitte}}$$

.
(4) Wende Schritt (2) und (3) auf die drei verbleibenden Teildreiecke an um Δ^k bestehend aus 3^k Teildreiecken zu definieren.
(5) $\Delta_{\text{Sierpinski}} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \Delta^k$

Berechnen Sie die Hausdorff-Dimension des Sierpinski-Dreiecks.



Wir wünschen ihnen ein frohes Weihnachtsfest
und einen guten Start ins neue Jahr!