04.02.2016

Analysis III

15.23 Korollar: Sei M eine orientierbare $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit, $U, V \subset M$ offen, $U \cup V = M$. Dann gibt es eine lange De Rham Cohomologie-Sequenz

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & H^{p+1}_{DR}(M) \arrow[r] & \cdots \\
\arrow[r] & H^p_{DR}(M) \arrow[r] & H^p_{DR}(U) \oplus H^p_{DR}(V) \arrow[r] & H^p_{DR}(U \cap V) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & H^{p-1}_{DR}(U \cap V) \arrow[r] & \\
0 \arrow[r] & H^0_{DR}(M) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$\square$

15.24 Definition: $\Omega^p_c(M)$ bezeichne den Vektorraum der p-Formen auf M mit kompakten Träger. Der De-Rham Komplex von Formen mit kompakten Träger

$$\Omega^p_c(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}_c(M)$$

und die Cohomologie mit kompakten Träger

$$H^p_c(M) = \frac{\operatorname{Ker}(\Omega^p_c(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}_c(M))}{\operatorname{Im}(\Omega^{p-1}_c(M) \longrightarrow \Omega^p_c(M))}.$$

Bemerkung: $\Omega^\bullet_{DR}(M)$ operiert auf $\Omega^\bullet_c(M)$ mit $\wedge$-Produkt, da $\omega \wedge \eta$ kompakten Träger hat, wenn η kompakten Träger hat und diese Operation gibt $H^\bullet_c(M)$ die Struktur eines $H^*_{DR}(M)$-Moduls.

15.25 Satz: 1) $M = U \cup V$ wie oben. Dann gibt es eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$0 \longrightarrow \Omega^\bullet_c(U \cap V) \xrightarrow{-} \Omega^\bullet_c(U) \oplus \Omega^\bullet_c(V) \xrightarrow{+} \Omega^\bullet_c(M) \longrightarrow 0$$

und

2) eine lange exakte Sequenz

$$\to H_c^{p+1}(U \cap V) \longrightarrow \dots$$

$$\to H_c^p(U \cap V) \longrightarrow H_c^p(U) \oplus H_c^p(V) \longrightarrow H_c^p(M)$$

Beweis: Nur die Surjektivität in 1) ist nicht sofort offensichtlich. Betrachte ϱ_U, ϱ_V wie oben mit $\varrho_V + \varrho_U = 1$. $\varrho_U|_{M \setminus U} = 0$, $\varrho_V|_{M \setminus V} = 0$.
$\omega \in \Omega_c^p(M)$, $\omega = \underset{\Omega_c^p(U)}{\underset{\cap}{\varrho_U \omega}} + \underset{\Omega_c^p(V)}{\underset{\cap}{\varrho_V \omega}}$. $\square$

<u>15.26 Satz:</u> Sei M eine orientierte C^∞-Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Basis der Topologie der Dimension n. Dann sind die Abbildungen

$$H_{DR}^p(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_c^{n-p}(M), \mathbb{R})$$
$$[\omega] \longmapsto \{[\eta] \longmapsto \int_M \omega \wedge \eta\}$$

für jedes p Isomorphismen.

<u>Korollar:</u> Sei M kompakt und orientierbar, dann gilt die Poincaré-Dualität.

<u>15.27 Satz:</u> Es bezeichne $T(M)$ die Aussage, dass für M die Schlussfolgerung von 15.26 gilt. Ist $M = U \cup V$, dann gilt:

$$T(U \cap V),\ T(U),\ T(V) \Rightarrow T(M).$$

<u>Beweis:</u> Wir wenden $\mathrm{Hom}(\ , \mathbb{R})$ auf die lange exakte Kohomologiesequenz mit kompakten Träger an.

$$\begin{tikzcd}
\to \mathrm{Hom}(H_c^{n-p-1}(U)\oplus H_c^{n-p-1}(V),\mathbb{R}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(H_c^{n-p-1}(U\cap V),\mathbb{R}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(H_c^{p}(M),\mathbb{R}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(H_c^{p}(U)\oplus H_c^{p}(V),\mathbb{R}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(H_c^{p}(U\cap V),\mathbb{R}) \\
H_{DR}^{n-p-1}(U)\oplus H_{DR}^{n-p-1}(V) \arrow[u, "\cong"'] \arrow[r] & H_{DR}^{n-p-1}(U\cap V) \arrow[u, "\cong"'] \arrow[r] & H_{DR}^{n-p}(M) \arrow[u] \arrow[r] & H_{DR}^{n-p}(U)\oplus H_{DR}^{n-p}(V) \arrow[u, "\cong"'] \arrow[r] & H_{DR}^{n-p}(U\cap V) \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

5-Lemma: in der Mitte ist auch ein Isomorphismus.

<u>5-Lemma</u>: Sei

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & D \arrow[r] & E \\
A' \arrow[u] \arrow[r] & B' \arrow[u] \arrow[r] & C' \arrow[u] \arrow[r] & D' \arrow[u] \arrow[r] & E' \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, mapsto] & b \arrow[r, mapsto] & c \arrow[r, mapsto] & d \arrow[r, mapsto] & 0 \\
a' \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & b' \arrow[u, mapsto, "\cong"'] \arrow[r, mapsto] & c' \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & d' \arrow[u, mapsto, "\cong"'] \arrow[u, mapsto] & 0 \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

kommutatives Diagramm abelscher Gruppen mit exakten Zeilen. Sind die 4 äußeren senkrechten Abbildungen Isomorphismen, dann ist auch die in der Mitte ein Isomorphismus. Beweis durch Diagrammjagd.

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r] & b \arrow[r] & \varphi(c')_c \arrow[r, mapsto] & d \arrow[r, mapsto] & 0 \\
\cdot \arrow[u] \arrow[r] & b' \arrow[u, mapsto, "\cong"'] \arrow[r] & c' \arrow[u, mapsto, "\varphi"'] \arrow[r] & d' \arrow[u, mapsto, "\cong"'] \arrow[r] & 0 \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, mapsto] & c - \varphi(c') \\
b' \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & c' + \mathrm{Bild}(b') \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

<u>15.23 Satz</u>: Sei M wie oben, $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$ disjunkte Vereinigung disjunkter offener Teilmengen. Dann gilt

$$T(U_\alpha)\ \forall \alpha \Rightarrow T(M)$$

<u>Beweis</u>: $H_c^p(\bigcup U_\alpha) \cong \bigoplus_\alpha H_c^p(U_\alpha)$

$H_{DR}^p(\bigcup U_\alpha) \cong \prod_\alpha H_{DR}^p(U_\alpha)$

$$\mathrm{Hom}\left(\bigoplus_\alpha H_c^p(U_\alpha), \mathbb{R}\right) = \prod_\alpha \mathrm{Hom}\left(H_c^p(U_\alpha), \mathbb{R}\right).$$

$$\forall \alpha: \quad H_{DR}^p(U_\alpha) \longrightarrow \mathrm{Hom}\left(H_c^{n-p}(U_\alpha), \mathbb{R}\right)$$

$$\Rightarrow \prod_\alpha H_{DR}^p(U_\alpha) \longrightarrow \prod_\alpha \mathrm{Hom}\left(H_c^{n-p}(U_\alpha), \mathbb{R}\right)$$

$$= H_{DR}^p(M) \qquad = \mathrm{Hom}\Big(\underbrace{\bigoplus_\alpha H_c^{n-p}(U_\alpha)}_{H_c^{n-p}(M)}, \mathbb{R}\Big)$$

<u>15.30 Korollar:</u> Es gilt

$$H_c^p(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & p=n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

<u>15.31 Definition:</u> $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n$ sei die Projektion auf die zweite Komponente. Für $\Omega_c^p(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) \ni f(x,t)\,dt\wedge\eta + g(x,t)\,\xi$ wobei $\eta = \pi\tilde{\eta} \in \Omega_c^{p-1}(\mathbb{R}^n)$, $\xi \in \pi^*\Omega_c^p(\mathbb{R}^n)$ sei

$$\pi_*\omega = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,dt\right)\tilde{\eta} \in \Omega_c^{p-1}(\mathbb{R}^n).$$

Dies definiert eine lineare Abbildung

$$\pi_* : \Omega_c^p(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Omega_c^{p-1}(\mathbb{R}^n)$$

genannt Integration entlang der Faser.

$$e : \Omega_c^{p-1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Omega_c^p(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$$
$$\eta \longmapsto \rho(t)\,dt\wedge\pi^*\eta$$

wobei ρ eine Funktion mit kompaktem Träger ist mit $\int_{-\infty}^{\infty}\rho(t)\,dt = 1$.

<u>15.32 Satz:</u> Dann gilt:

a) $d\pi_* = \pi_* d$,

b) $de = ed$,

c) $\pi_* \circ e = \mathrm{id}_{\Omega_c^*(\mathbb{R}^n)}$,

d) $e\pi_*$ und $\mathrm{id}_{\Omega_c^*(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}$ sind homotop.

15.33 Definition: Zwei Abbildungen f, g zwischen Komplexen

$$\begin{tikzcd}
A^{p-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & A^p \arrow[r] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & A^{p+1} \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \\
B^{p-1} \arrow[r] & B^p \arrow[r] & B^{p+1}
\end{tikzcd}$$

heißen homotop, wenn es Abbildungen $h^p : A^p \to B^{p-1}$ gibt, so dass

$$dh^p + h^{p+1} d = f^p - g^p .$$

15.34 Satz: Homotope Abbildungen von Komplexen induzieren die gleiche Abbildung auf der Homologie.

Beweis: $[\alpha] \in H^p(A)$, $d\alpha = 0$ $\qquad f^p(\alpha) - g^p(\alpha) = dh^p(\alpha)$

$$\Rightarrow [f^p(\alpha)] = [g^p(\alpha)]$$

Korollar: $H_c^{p+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \cong H_c^p(\mathbb{R}^n)$

Beweis (Satz 15.33): Die Homotopie ist

$$h^p \psi = \int_{-\infty}^{t} f \, dt \, \varphi - \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, dt \right) A(t) \varphi$$

mit $A(t) = \int_{-\infty}^{t} \rho(t) \, dt$. $\square$

Beweis des Satzes: Zunächst der Fall, dass $M \subset \mathbb{R}^n$ offen ist. Wir wählen eine Ausschöpfung durch Kompakta

$$K_0 \subset \mathring{K}_1 \subset K_1 \subset \mathring{K}_2 \subset K_2 \subset \dots$$

mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = M$ und offene Mengen U_i mit

$$K_1 \subset U_1 \subset \overline{U_1} \subset K_2$$

und $K_2 \setminus \mathring{K}_1 \subset U_2 \subset \overline{U}_2 \subset K_3$ und allgemeiner

$$K_i \setminus \mathring{K}_{i-1} \subset U_i \subset \overline{U}_i \subset \mathring{K}_{i+1} \setminus \overline{U}_{i-2} \qquad i \geq 3.$$

Schließlich setzen wir $U = \bigcup_{i \equiv 0 (2)} U_i$ und $V = \bigcup_{i \equiv 1 (2)} U_i$, wobei die U_i endliche Vereinigungen offener Quader sind, $U \cap V = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \cap U_{i+1}$ und die Behauptung folgt für n.

n allgemein schließen wir analog aus, für die U_i's verwenden wir Kartengebiete. $\square$