UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Algebra

Wintersemester 2017/18

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 10.15 Uhr, am 16.11.2017, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 4 09.11.2017

Aufgabe 1. Lässt sich bei dem bekannten Schiebespiel die erste der folgenden Konfigurationen in die Ausgangsstellung überführen?

2	1	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Aufgabe 2. Seien p und q Primzahlen mit mit $p < q$ und p kein Teiler von $q-1$. Zeigen Sie, dass jede Gruppe G der Ordnung $p \cdot q$ zyklisch ist.

Aufgabe 3. Sei G eine einfache Gruppe der Ordnung 60. Zeigen Sie, dass G isomorph zu A_5 ist, indem Sie folgendermaßen vorgehen:

(0) Bestimmen Sie die 2-Sylowuntergruppen von A_5.

(1) Zeigen Sie, dass jede Untergruppe $H \subsetneqq G$ wenigstens Index $(G : H) \geq 5$ hat und das im Fall $(G : H) = 5$ schon $G \cong A_5$ gilt.

(2) Bestimmen Sie die Anzahl der 3- und 5-Sylowuntergruppen von G.

(3) Zeigen Sie, dass sich je zwei 2-Sylowuntergruppen H, H' von G trivial schneiden, indem sie zu $x \in H \cap H'$ mit $x \neq 1_G$ die Menge
$$Z_G(x) = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}$$
betrachten.

(4) Zeigen Sie, dass die Anzahl der 2-Sylowuntergruppen von G genau 5 ist. Folgern Sie, dass G isomorph zu A_5 ist.

Aufgabe 4. Finden Sie alle Normalreihen einer zyklischen Gruppe der Ordnung 20.