KAPITEL 11

Weiterer Ausbau der Integralrechnung

1. Weglänge und Wegintegral

Im folgenden sei $[a, b]$ stets ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall in $\mathbb{R}$ mit $-\infty < a < b < \infty$.

11.1. Definition. Ein *Weg* im $\mathbb{R}^N$ ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$. Die Menge $\gamma([a, b]) = \{\gamma(t)\,;\, a \le t \le b\}$ heißt die *Spur des Weges* γ. Nach Satz 4.18 ist dies eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^N$.

11.2. Beispiele. (a) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, reellwertige Funktion, so ist durch $\gamma_f(t) := (t, f(t))$ für $a \le t \le b$ ein Weg in $\mathbb{R}^2$ definiert, der den Graphen von f durchläuft.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Abbildung $\gamma_n : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ (bzw. $\gamma_n : [0, 1] \to \mathbb{C}$) definiert durch $\gamma_n(t) := (\cos(2n\pi t), \sin(2n\pi t))$ (bzw. $\gamma_n(t) := \exp(i2n\pi t)$) für $0 \le t \le 1$. Der Weg γ_n durchläuft die Einheitskreislinie genau n mal im mathematischen Drehsinn (gegen den Uhrzeigersinn).

(c) Sind $x_0, x_1, \ldots, x_n$ Punkte in $\mathbb{R}^N$, so ist durch $\pi : [0, n] \to \mathbb{R}^N$ mit

$$\pi(t) := (t - j + 1)x_j + (j - t)x_{j-1} \qquad \text{für } j - 1 \le t \le j \quad \text{und } j = 1, \ldots, n$$

ein Weg gegeben, der der Reihe nach die Strecken von x_{j-1} nach x_j für $j = 1, \ldots, n$ durchläuft. Wir nennen π den *Polygonzug*, der die Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_n$ durchläuft.

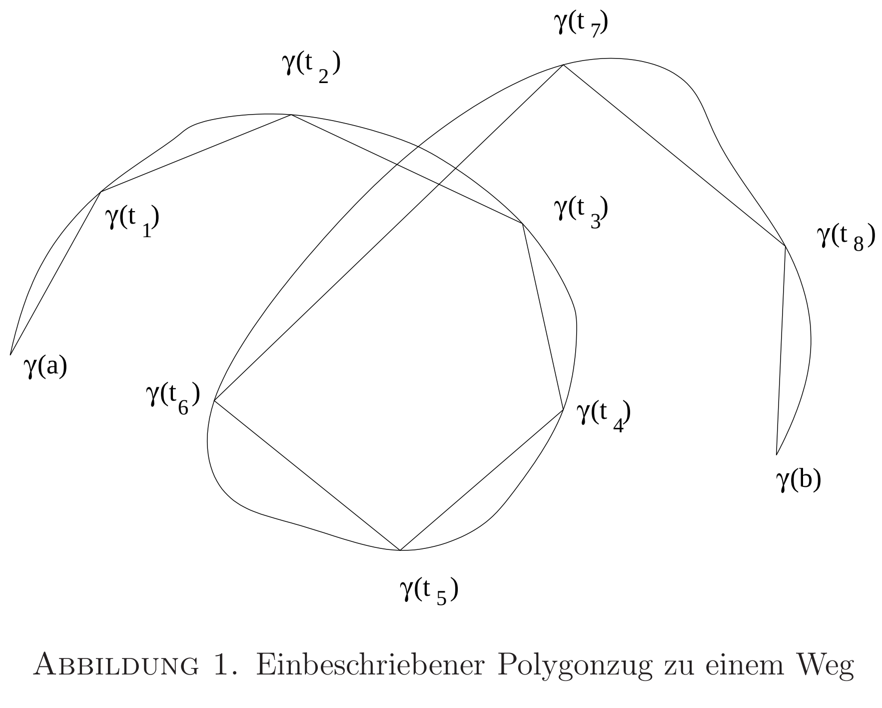

Abbildung 1. Einbeschriebener Polygonzug zu einem Weg

11.3. Definition. Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ ein Weg und sei

$$\mathfrak{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\} \in \mathfrak{Z}([a, b])$$

eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$. Dann ist

$$L_{\mathfrak{Z}}(\gamma) := \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|$$

die elementargeometrische Länge des einbeschriebenen Polygonzuges, der die Punkte

$$\gamma(t_0) = \gamma(a), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n) = \gamma(b)$$

in dieser Reihenfolge durchläuft. Der Weg γ heißt *rektifizierbar*, falls

$$L(\gamma) := \sup_{\mathfrak{Z} \in \mathfrak{Z}([a,b])} L_{\mathfrak{Z}}(\gamma) < \infty\,.$$

$L(\gamma)$ heißt dann die *Länge des Weges* γ.

Nicht jeder Weg ist rektifizierbar wie das folgende Beispiel zeigt.

11.4. Beispiel. Die Abbildung $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$\gamma(t) := \begin{cases} t\cos\left(\frac{\pi}{t}\right) & \text{für } 0 < t \le 1 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

ist stetig, aber der hierdurch gegebene Weg in $\mathbb{R}$ ist nicht rektifizierbar.

Zum Beweis betrachten wir für alle $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Zerlegung

$$\mathfrak{Z}_n := \left\{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n-2}, \dots, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

des Intervalls $[0,1]$. Man erhält wegen $\cos(j\pi) = (-1)^j$ und der Divergenz der harmonischen Reihe (Satz 3.9) für $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} L_{\mathfrak{Z}_n}(\gamma) :=& \left|\gamma\left(\frac{1}{2n}\right) - \gamma(0)\right| + \sum_{j=1}^{2n-1} \left|\gamma\left(\frac{1}{j}\right) - \gamma\left(\frac{1}{j+1}\right)\right| \\ =& \frac{1}{2n} + \sum_{j=1}^{2n-1}\left(\frac{1}{j} + \frac{1}{j+1}\right) > \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{j} \to \infty\,. \end{aligned}$$

11.5. Lemma. *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ ein Weg in $\mathbb{R}^N$ und sei $\mathfrak{Z}_0 \in \mathfrak{Z}([a,b])$ eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$. Dann gilt für jede Verfeinerung $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{Z}_0$:*

$$L_{\mathfrak{Z}_0}(\gamma) \le L_{\mathfrak{Z}}(\gamma)\,.$$

Beweis. Ist $\mathfrak{Z}_0 = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ und zunächst $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_0 \cup \{s\}$ für ein $s \in [a,b]$ mit $s \notin \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, so ist $t_{k-1} < s < t_k$ für ein $k \in \{1, \dots, n\}$ und wir erhalten mit der Dreiecksungleichung

(11.1)

$$\begin{aligned} L_{\mathfrak{Z}_0}(\gamma) =& \sum_{j=1}^{k-1} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| + |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| + \sum_{j=k+1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \\ \le& \sum_{j=1}^{k-1} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| + |\gamma(t_k) - \gamma(s)| + |\gamma(s) - \gamma(t_{k-1})| + \sum_{j=k+1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \\ \le& L_{\mathfrak{Z}}(\gamma) \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion nach $p := |\mathfrak{Z} \setminus \mathfrak{Z}_0|$ zeigt man nun leicht die Behauptung für beliebige Verfeinerungen $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{Z}_0$. $\square$

11.6. Satz. *Ein Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ ist genau dann rektifizierbar, wenn gilt:*

$$\exists L \geq 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \mathfrak{Z} \in \mathfrak{Z}([a,b]) : \quad \delta(\mathfrak{Z}) < \delta \Longrightarrow |L_{\mathfrak{Z}}(\gamma) - L| < \varepsilon\,. \tag{11.2}$$

Hierbei bezeichnet

$$\delta(\mathfrak{Z}) := \max_{1 \leq j \leq n} (t_j - t_{j-1})$$

die Feinheit der Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\} \in \mathfrak{Z}([a,b])$. Es gilt dann $L = L(\gamma)$.

Beweis. „$\Longleftarrow$“: Sei also (11.2) erfüllt und sei L wie in (11.2). Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und sei $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ wie in (11.2). Ist $\mathfrak{Z}$ eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$, so gibt es eine Verfeinerung $\mathfrak{Z}_0$ von $\mathfrak{Z}$ mit $\delta(\mathfrak{Z}_0) < \delta$. Wegen Lemma 11.5 und (11.2) folgt:

$$L_{\mathfrak{Z}}(\gamma) \leq L_{\mathfrak{Z}_0}(\gamma) < L + \varepsilon\,.$$

Also gilt für alle $\varepsilon > 0$:

$$\sup_{\mathfrak{Z} \in \mathfrak{Z}([a,b])} L_{\mathfrak{Z}}(\gamma) < L + \varepsilon\,.$$

γ ist also rektifizierbar und es ist $L(\gamma) \leq L$.

„$\Longrightarrow$“: Sei nun $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ rektifizierbar. Wir zeigen, daß (11.2) erfüllt ist mit $L = L(\gamma)$.

Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wegen $L = \sup\{L_{\mathfrak{Z}}(\gamma)\,;\, \mathfrak{Z} \in \mathfrak{Z}([a,b])\}$ gibt es eine Zerlegung $\mathfrak{Z}_0 = \{a = s_0 < s_1, \cdots < s_m = b\} \in \mathfrak{Z}([a,b])$ mit

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < L_{\mathfrak{Z}_0}(\gamma) \leq L\,. \tag{11.3}$$

Als stetige Funktion auf dem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[a,b]$ ist γ nach Satz 4.38 schon gleichmäßig stetig. Es gibt also ein $\delta > 0$ mit

$$\forall s,t \in [a,b] : \qquad |s-t| < \delta \Longrightarrow |\gamma(s) - \gamma(t)| < \frac{\varepsilon}{4m}\,. \tag{11.4}$$

Sei nun $\mathfrak{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\} \in \mathfrak{Z}([a,b])$ beliebig mit $\delta(\mathfrak{Z}) < \delta$. Wie in (11.1) im Beweis zu Lemma 11.5 erhält man, wenn $k \in \{1,\ldots,n\}$ so gewählt ist, daß $t_{k-1} \leq s_1 \leq t_k$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq L_{\mathfrak{Z} \cup \{s_1\}}(\gamma) - L_{\mathfrak{Z}}(\gamma) \leq& |\gamma(s_1) - \gamma(t_{k-1})| + |\gamma(t_k) - \gamma(s_1)| \\ <& \frac{\varepsilon}{4m} + \frac{\varepsilon}{4m} = \frac{\varepsilon}{2m} \qquad \text{(unter Verwendung von (11.4))}. \end{aligned}$$

Induktiv zeigt man durch sukzessive Hinzunahme der Punkte $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$:

$$0 \leq L_{\mathfrak{Z} \cup \mathfrak{Z}_0}(\gamma) - L_{\mathfrak{Z}}(\gamma) < (m-1)\frac{\varepsilon}{2m} < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{11.5}$$

Da $\mathfrak{Z} \cup \mathfrak{Z}_0$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{Z}_0$ ist, folgt nach (11.3) mit Lemma 11.5 und der Definition von L

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < L_{\mathfrak{Z}_0}(\gamma) \leq L_{\mathfrak{Z} \cup \mathfrak{Z}_0}(\gamma) \leq L$$

und hieraus mit (11.5)

$$|L - L_{\mathfrak{Z}}(\gamma)| \leq |L - L_{\mathfrak{Z} \cup \mathfrak{Z}_0}(\gamma)| + |L_{\mathfrak{Z} \cup \mathfrak{Z}_0}(\gamma) - L_{\mathfrak{Z}}(\gamma)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Also ist (11.2) erfüllt. □

Wir wollen nun zeigen, daß jeder stetig differenzierbare Weg schon rektifizierbar ist. Hierzu benötigen wir:

11.7. Lemma. *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ stetig differenzierbar. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für alle $s,t \in [a,b]$ mit $0 < |s-t| < \delta$ gilt:*

$$\left| \frac{1}{s-t} (\gamma(s) - \gamma(t)) - \gamma'(t) \right| < \varepsilon \,.$$

Beweis. (a) Wir führen den Beweis zunächst für den Spezialfall $N = 1$. Da die Ableitung $\gamma' : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, ist γ' nach Satz 4.38 schon gleichmäßig stetig auf $[a,b]$. Es gibt also ein $\delta > 0$ mit

$$\forall\, \sigma, \tau \in [a,b] : \qquad |\sigma - \tau| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\gamma'(\sigma) - \gamma'(\tau)| < \varepsilon \,.$$

Sind nun $s,t \in [a,b]$ beliebig vorgegeben mit $0 < |s-t| < \delta$, so gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung 5.20 ein σ zwischen s und t mit

$$\gamma'(\sigma) = \frac{1}{s-t}(\gamma(s) - \gamma(t)) \,.$$

Damit folgt

$$\left| \frac{1}{s-t}(\gamma(s) - \gamma(t)) - \gamma'(t) \right| = |\gamma'(\sigma) - \gamma'(t)| < \varepsilon \,.$$

(b) Sei nun $N \in \mathbb{N}$ beliebig, also $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_N(t))$ mit stetig differenzierbaren Funktionen $\gamma_1, \ldots, \gamma_N : [a,b] \to \mathbb{R}$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Indem wir (a) auf die Wege $\gamma_1, \ldots, \gamma_N : [a,b] \to \mathbb{R}$ anwenden, finden wir zu $\varepsilon' := \varepsilon/\sqrt{N}$ positive Zahlen $\delta_1, \ldots, \delta_N$ mit

$$\forall s,t \in [a,b] : \qquad 0 < |s-t| < \delta_j \quad \Longrightarrow \left| \frac{1}{s-t} (\gamma_j(s) - \gamma_j(t)) - \gamma_j'(t) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{N}} \,.$$

für $j = 1, \ldots, N$. Damit folgt für alle $s,t \in [a,b]$ mit $|s-t| < \delta := \min\limits_{1 \le j \le N} \delta_j$:

$$\left| \frac{1}{s-t} (\gamma(s) - \gamma(t)) - \gamma'(t) \right| = \left(\sum_{j=1}^N \left| \frac{1}{s-t} (\gamma_j(s) - \gamma_j(t)) - \gamma_j'(t) \right|^2 \right)^{1/2} <$$

$$< \left(\sum_{j=1}^N \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{N}} \right)^2 \right)^{1/2} = \varepsilon \,.$$

□

11.8. Satz. *Jeder stetig differenzierbare Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ rektifizierbar und hat die Weglänge*

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt \,.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen Satz 11.6 genügt es zu zeigen, daß es ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}([a,b])$ mit $\delta(\mathfrak{z}) < \delta$ gilt:

$$\left| L_{\mathfrak{z}}(\gamma) - \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt \right| < \varepsilon \,. \tag{11.6}$$

Nach Lemma 11.7 gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\forall s,t \in [a,b] : \quad 0 < |s-t| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{1}{s-t} (\gamma(s) - \gamma(t)) - \gamma'(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \,. \tag{11.7}$$

Durch eventuelles Verkleinern von δ können wir wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von γ' auf $[a,b]$ erreichen, daß zusätzlich gilt:

$$\forall s,t \in [a,b] : \quad 0 < |s-t| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\gamma'(s) - \gamma'(t)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \,. \tag{11.8}$$

Sei nun $\mathfrak{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ eine beliebige Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ mit $\delta(\mathfrak{Z}) < \delta$. Wir erhalten unter Verwendung von (11.7) und (11.8) die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\Big|L_{\mathfrak{Z}}(\gamma) - \int_a^b |\gamma'(t)| dt\Big| &= \Big|\sum_{j=1}^n |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| - \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)|\, dt\Big| \\
&\leq \sum_{j=1}^n \Big|\int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big|\frac{1}{t_j - t_{j-1}}(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))\Big|\, dt - \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)|\, dt\Big| \\
&\leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big|\Big|\frac{1}{t_j - t_{j-1}}(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))\Big| - |\gamma'(t)|\Big|\, dt \\
&\leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big|\frac{1}{t_j - t_{j-1}}(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) - \gamma'(t)\Big|\, dt \\
&\leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(\underbrace{\Big|\frac{1}{t_j - t_{j-1}}(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) - \gamma'(t_{j-1})\Big|}_{< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} + \underbrace{|\gamma'(t_{j-1}) - \gamma'(t)|}_{< \frac{\varepsilon}{3(b-a)}}\Big) dt \\
&\leq \frac{5\varepsilon}{6(b-a)} \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) = \frac{5}{6}\varepsilon < \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Also gilt (11.6) und damit die Behauptung. □

11.9. Lemma. *Sei $a < c < b$ und sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ stetig. Genau dann ist γ rektifizierbar, wenn die Teilwege $\gamma|_{[a,c]}$ und $\gamma|_{[c,b]}$ rektifizierbar sind. Es gilt dann:*

$$L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma|_{[c,b]}).$$

Beweis. "$\Longrightarrow$": Sei γ rektifizierbar. Dann gilt für alle $\mathfrak{Z}_1 \in \mathfrak{Z}([a,c])$, $\mathfrak{Z}_2 \in \mathfrak{Z}([c,b])$:

$$L_{\mathfrak{Z}_1}(\gamma|_{[a,c]}) + L_{\mathfrak{Z}_2}(\gamma|_{[c,b]}) = L_{\mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2}(\gamma) \leq L(\gamma)\,.$$

Durch Übergang zum Supremum bezüglich $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ sieht man, daß $\gamma|_{[a,c]}$ und $\gamma|_{[c,b]}$ rektifizierbar sind und daß $L(\gamma) \geq L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma|_{[c,b]})$ gilt.

"$\Longleftarrow$": Seien nun die Wege $\gamma|_{[a,c]}$ und $\gamma|_{[c,b]}$ rektifizierbar und sei $\mathfrak{Z} \in \mathfrak{Z}([a,b])$ beliebig. Dann gilt mit $\mathfrak{Z}_1 := (\mathfrak{Z} \cap [a,c]) \cup \{c\}$ und $\mathfrak{Z}_2 := (\mathfrak{Z} \cap [c,b]) \cup \{c\}$:

$$L_{\mathfrak{Z}}(\gamma) \leq L_{\mathfrak{Z} \cup \{c\}}(\gamma) = L_{\mathfrak{Z}_1}(\gamma) + L_{\mathfrak{Z}_2}(\gamma) \leq L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma|_{[c,b]}).$$

Also ist γ rektifizierbar und es gilt $L(\gamma) \leq L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma|_{[c,b]})$. □

11.10. Definition. Eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ heiße *stückweise stetig differenzierbar* , falls es eine Zerlegung $\{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ von $[a,b]$ gibt, so daß für alle $j = 1, \ldots, 1$ die Funktion $f|_{[t_{j-1}, t_j]} : [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{R}^N$ auf $[t_{j-1}, t_j]$ stetig differenzierbar ist.

Aus Satz 11.8 und Lemma 11.9 erhalten wir unmittelbar:

11.11. Folgerung. *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann ist γ rektifizierbar und es gilt:*

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt\,.$$

11.12. Folgerung. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig differenzierbar. Dann ist der durch $\gamma_f(t) := (t, f(t))$ definierte Weg $\gamma_f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ rektifizierbar und es gilt:*

$$L(\gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt\,.$$

11.13. Beispiele. (a) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$\gamma(t) := (\cos(3\pi t), \sin(3\pi t), 4\pi t) \qquad \text{für alle } t \in [0,1].$$

Dieser Weg ist stetig differenzierbar mit

$$\gamma'(t) = (-3\pi \sin(3\pi t), 3\pi \cos(3\pi t), 4\pi).$$

Nach Satz 11.8 ist γ also rektifizierbar und es gilt:

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = \int_0^1 \sqrt{9\pi^2 + 16\pi^2} dt = 5\pi\,.$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\gamma_n : [0,1] \to \mathbb{C}\,(= \mathbb{R}^2)$ definiert durch $\gamma_n(t) := \exp(2n\pi i t)$ für $0 \le t \le 1$. Auch dieser Weg ist stetig differenzierbar und somit rektifizierbar. Wegen $\gamma_n'(t) = 2n\pi i \exp(2n\pi i t)$ folgt für die Weglänge nach Satz 11.8:

$$L(\gamma_n) = \int_a^b |\gamma_n'(t)| dt = \int_a^b 2n\pi dt = 2n\pi\,.$$

11.14. Satz. *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ ein rektifizierbarer Weg und sein $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ eine bijektive, stetige Abbildung mit $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$. Dann ist der Weg $\gamma \circ \varphi : [c,d] \to \mathbb{R}^N$ rektifizierbar mit* $\mathrm{Spur}(\gamma \circ \varphi) = \mathrm{Spur}(\gamma)$ *und es gilt $L(\gamma \circ \varphi) = L(\gamma)$.*

Beweis. Daß γ und $\gamma \circ \varphi$ die gleiche Spur haben, ist offensichtlich. Ist $\mathfrak{Z} = \{c = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = d\} \in \mathfrak{Z}([c,d])$ beliebig, so folgt wegen der strengen Monotonie von φ (vergl. Satz 4.32) für $j = 1, \ldots, n$, daß $\varphi(t_{j-1}) < \varphi(t_j)$ gilt. $\varphi(\mathfrak{Z}) = \{a = \varphi(t_0) < \varphi(t_1) < \cdots < \varphi(t_n) = b\}$ ist also eine Zerlegung von $[a,b]$ und es folgt

$$L_{\mathfrak{Z}}(\gamma \circ \varphi) = \sum_{j=1}^{n} |\gamma(\varphi(t_j)) - \gamma(\varphi(t_{j-1}))| = L_{\varphi(\mathfrak{Z})}(\gamma) \le L(\gamma)\,.$$

$\gamma \circ \varphi$ ist also rektifizierbar und $L(\gamma \circ \varphi) \le L(\gamma)$. Wenden wir dies auf $\gamma \circ \varphi$ statt γ und φ^{-1} statt φ an, so folgt auch $L(\gamma) = L((\gamma \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}) \le L(\gamma \circ \varphi)$ und somit $L(\gamma \circ \varphi) = L(\gamma)$. □

11.15. Definition. Zwei Wege $\gamma_1 : [c,d] \to \mathbb{R}^N$ und $\gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ heißen *äquivalent* (in Kurzform: $\gamma_1 \sim \gamma_2$), falls es eine bijektive, stetige Abbildung $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ gibt mit $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$ und $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. Die Abbildung $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ heißt dann auch eine *Parametertransformation*. Man rechnet unmittelbar nach, daß "$\sim$" tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Wege in $\mathbb{R}^N$ definiert.

Eine *Kurve* Γ in $\mathbb{R}^N$ ist eine Äquivalenzklasse von Wegen in $\mathbb{R}^N$. Die Elemente dieser Äquivalenzklassen nennen wir auch *Parametrisierungen* der Kurve Γ. Eine Kurve Γ in $\mathbb{R}^N$ heißt rektifizierbar, falls sie eine rektifizierbare Parametrisierung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ besitzt. Wir definieren dann die *Kurvenlänge* von Γ durch $L(\Gamma) := L(\gamma)$. Nach Satz 11.14 ist diese unabhängig von der speziellen Parametrisierung. Die *Spur* einer Kurve Γ ist per Definition die Spur einer beliebigen Parametrisierung von Γ. Nach Satz 11.14 ist auch diese unabhängig von der speziellen Parametrisierung. Eine Kurve Γ heißt *stückweise stetig differenzierbar*, falls sie eine stückweise stetige Parametrisierung besitzt.

Durch ein Beispiel zeigen wir nun, daß nicht alle Parametrisierungen einer (stückweise) stetig differenzierbaren Kurve (stückweise) stetig differenzierbar sein müssen.

11.16. Beispiel. Die Wege $\gamma_1 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma_1(t) := (\cos(t), \sin(t))$, und $\gamma_2 : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma_2(t) := (-t, \sqrt{1-t^2})$, sind äquivalent denn $\varphi : [0,\pi] \to [0,1]$ mit $\varphi(t) := -\cos(t)$ für $0 \le t \le \pi$ ist stetig mit $\varphi(0) = -1$, $\varphi(\pi) = 1$, ist wegen $\varphi'(t) = \sin(t) > 0$ auf $(0,\pi)$ streng monoton wachsend, auf $[0,\pi]$ also bijektiv und erfüllt $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. γ_1 ist sogar stetig differenzierbar, aber γ_2 ist in den Randpunkten nicht differenzierbar.

Die folgende Definition von Wegintegralen ist zwar nicht die allgemeinst mögliche, reicht aber für viele Anwendungen aus.

11.17. Definition. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{K}^N$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg.

(a) Für stetige Funktionen $f : \mathrm{Spur}(\gamma) \to \mathbb{K}$ definieren wir das *Wegintegral erster Art* über f längs des Weges γ durch

$$\int_\gamma f(x)dx := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\,.$$

(b) Ist $F : \mathrm{Spur}(\gamma) \to \mathbb{R}^N$ eine stetige $\mathbb{R}^N$–wertige Funktion, so ist das *Wegintegral zweiter Art* über F längs des Weges γ definiert durch:

$$\int_\gamma \langle F(x), dx\rangle := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt\,.$$

Physikalisch kann man dies interpretieren als die Arbeit, die entlang des Weges γ bei Einwirkung der äußeren Kraft F geleistet wird.

11.18. Lemma. *Die in Definition 11.17 definierten Wegintegrale ändern sich nicht bei stetig differenzierbaren Parametertransformationen. Ist $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ bijektiv und stetig differenzierbar mit $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$, so gilt*

$$\int_\gamma f(x)dx = \int_{\gamma\circ\varphi} f(x)dx\,; \qquad \int_\gamma \langle F(x), dx\rangle = \int_{\gamma\circ\varphi} \langle F(x), dx\rangle\,.$$

Beweis. Nach Definition der Wegintegrale gilt:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\varphi} f(x)dx &= \int_c^d f(\gamma(\varphi(t)))(\gamma\circ\varphi)'(t)dt = \int_c^d f(\gamma(\varphi(t)))\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)dt\\ &= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = \int_\gamma f(x)dx\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\varphi} \langle F(x), dx\rangle &= \int_c^d \langle F(\gamma(\varphi(t))), (\gamma\circ\varphi)'(t)\rangle dt = \int_c^d \langle F(\gamma(\varphi(t))), \varphi'(t)\gamma'(\varphi(t))\rangle dt\\ &= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \langle F(\gamma(s)), \gamma'(s)\rangle ds = \int_\gamma \langle F(x), dx\rangle\,.\end{aligned}$$

□

11.19. Lemma (Rechenregeln). (a) *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{K}^N$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann gilt für alle stetigen Funktionen $f, g : \gamma([a,b]) \to \mathbb{K}$:*

(i) $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K} :\quad \displaystyle\int_\gamma (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_\gamma f(x)dx + \beta \int_\gamma g(x)dx.$

(ii) $\left|\int_\gamma f(x)dx\right| \leq L(\gamma)\|f\|_{\gamma([a,b])}$.

(b) *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann gilt für alle stetigen Funktionen $F, G : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}^N$:*

(i) $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \quad \int_\gamma \langle(\alpha F + \beta G)(x), dx\rangle = \alpha \int_\gamma \langle F(x), dx\rangle + \beta \int_\gamma \langle G(x), dx\rangle.$

(ii) $\left|\int_\gamma \langle F(x), dx\rangle\right| \leq L(\gamma)\|F\|_{\gamma([a,b])}$.

Beweis. (i) folgt in beiden Fällen aus den entsprechenden Rechenregeln für das Riemann–Integral.

Zu (ii) Nach Definition der Wegintegrale und unter Verwendung von Lemma 6.8 und Folgerung 11.11 erhalten wir:

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(x)dx\right| &= \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|dt \\ &\leq \|f\|_{\gamma([a,b])} \int_a^b |\gamma'(t)|dt = L(\gamma)\|f\|_{\gamma([a,b])}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma \langle F(x), dx\rangle\right| &= \left|\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt\right| \leq \int_a^b |\langle F(\gamma(t))\gamma'(t)\rangle|dt \leq \int_a^b |F(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|dt \\ &\leq \|F\|_{\gamma([a,b])} \int_a^b |\gamma'(t)|dt = L(\gamma)\|F\|_{\gamma([a,b])}\,.\end{aligned}$$

□

Analog wie in Satz 7.9 erhalten wir auch für Wegintegrale, deren Integrand stetig von einem Parameter abhängt, eine Stetigkeitsaussage:

11.20. Satz. *Sei $K \subset \mathbb{R}^M$ beschränkt und abgeschlossen.*

(a) *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{K}^N$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann gilt für alle stetigen Funktionen $f : \gamma([a,b]) \times K \to \mathbb{K}$: Die durch*

$$h(u) := \int_\gamma f(x,u)dx \qquad \text{für alle } u \in K$$

definierte Funktion $h : K \to \mathbb{K}^N$ ist gleichmäßig stetig.

(b) *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann gilt für alle stetigen Funktionen $F : \gamma([a,b]) \times K \to \mathbb{R}^N$: Die durch*

$$h(u) := \int_\gamma \langle F(x,u), dx\rangle \qquad \text{für alle } u \in K$$

definierte Funktion $h : K \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.

Beweis. Da auch $H := \gamma([a,b]) \times K$ beschränkt und abgeschlossen ist, muß f bzw. F schon gleichmäßig stetig auf H sein (vergl. Satz 4.38). Zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\delta > 0$, so daß für alle $x, y \in \gamma([a,b])$, $u, v \in K$ mit $|(x,u) - (y,v)| < \delta$ gilt

$$|f(x,u) - f(y,v)| < \frac{\varepsilon}{L(\gamma)+1} \quad \text{bzw.} \quad |F(x,u) - F(y,v)| < \frac{\varepsilon}{L(\gamma)+1}\,.$$

Für alle $u, v \in K$ mit $|u-v| < \delta$ folgt mit Lemma 11.19 (und dem zugehörigen Beweis):

$$\begin{aligned}|h(u)-h(v)| &= \left|\int_\gamma f(x,u) - f(x,v)dx\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t),u) - f(\gamma(t),v)| \cdot |\gamma'(t)|dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{L(\gamma)+1} L(\gamma) < \varepsilon\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}|h(u)-h(v)| &= \left|\int_\gamma \langle F(x,u) - F(x,v), dx\rangle\right| \leq \int_a^b |F(\gamma(t),u) - F(\gamma(t),v)| \cdot |\gamma'(t)|dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{L(\gamma)+1} L(\gamma) < \varepsilon\end{aligned}$$

In beiden Fällen ist also h auf K gleichmäßig stetig. □

2. Integration in mehreren Veränderlichen

Seien $I_j := [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, N$, kompakte Intervalle, $2 \leq N \in \mathbb{N}$ und sei

$$Q := I_1 \times \cdots \times I_N$$

der von diesen Intervallen aufgespannte achsenparallele Quader in $\mathbb{R}^N$. Ist $f : Q \to \mathbb{R}^M$ eine stetige Funktion und π eine Permutation von $1, 2, \ldots, N$, so existiert das Riemann-Integral

$$h_1(\xi) := \int_{a_{\pi(1)}}^{\xi_{\pi(1)}} f(\xi_1, \ldots, \xi_{\pi(1)-1}, x_{\pi(1)}, \xi_{\pi(1)+1}, \ldots, \xi_N) dx_{\pi(1)}\,, \qquad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in Q.$$

Die hierdurch definierte Funktion $h_1 : Q \to \mathbb{R}^M$ ist nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung bezüglich der Variablen $\xi_{\pi(1)}$stetig partiell differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial h_1}{\partial \xi_{\pi(1)}}(\xi) = h_0(\xi) := f(\xi)\,, \qquad \text{für alle } \xi \in Q.$$

Wir zeigen:

h_1 ist stetig auf Q.

Beweis. Seien $\xi \in Q$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Nach dem Satz 7.9 über die stetige Parameterabhängigkeit bei Riemann–Integralen gibt es ein $\delta_1 > 0$, so daß für alle Punkte $(\eta_1, \ldots, \eta_{\pi(1)-1}, \eta_{\pi(1)+1}, \ldots, \eta_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$ mit $\eta_j \in I_j$, und $|\xi_j - \eta_j| < \delta_1$ für alle $j = 1, \ldots, \pi(1)-1, \pi(1)+1, \ldots, N$ gilt:

$$|h_1(\xi) - h_1(\eta_1, \ldots, \eta_{\pi(1)-1}, \xi_{\pi(1)}, \eta_{\pi(1)+1}, \ldots, \eta_N)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit

$$\delta := \min\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2\|f\|_Q + 1}\right\}$$

folgt also für alle $\eta \in Q$ mit $|\xi - \eta| < \delta$:

$$\begin{aligned}|h_1(\xi) - h_1(\eta)| \leq& |h_1(\xi) - h_1(\eta_1, \ldots, \eta_{\pi(1)-1}, \xi_{\pi(1)}, \eta_{\pi(1)+1}, \ldots, \eta_N)| + \\ & |h_1(\eta_1, \ldots, \eta_{\pi(1)-1}, \xi_{\pi(1)}, \eta_{\pi(1)+1}, \ldots, \eta_N) - h_1(\eta)| \\ <& \frac{\varepsilon}{2} + \delta\|f\|_Q < \varepsilon,\end{aligned}$$

womit die Stetigkeit von h_1 gezeigt ist. □

Die Funktion h_1 kann nun bezüglich der $\pi(2)$–ten Variablen integriert werden und durch

$$h_2(\xi) := \int_{a_{\pi(2)}}^{\xi_{\pi(2)}} h_1(\xi_1, \ldots, \xi_{\pi(2)-1}, x_{\pi(2)}, \xi_{\pi(2)+1}, \ldots, \xi_N) dx_{\pi(2)}\,, \qquad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in Q.$$

ist eine stetige Funktion $h_2 : Q \to \mathbb{R}^M$ gegeben, die bezüglich $\xi_{\pi(2)}$ stetig partiell differenzierbar ist mit

$$\frac{\partial h_2}{\partial \xi_{\pi(2)}}(\xi) = h_1(\xi)\,, \qquad \text{für alle } \xi \in Q.$$

Nach dem Satz über die Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration (Folgerung 7.8) ist h_2 auch weiterhin bezüglich $\xi_{\pi(1)}$ stetig partiell differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_2}{\partial \xi_{\pi(1)}}(\xi) &= \int_{a_{\pi(2)}}^{\xi_{\pi(2)}} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_{\pi(1)}}(\xi_1, \ldots, \xi_{\pi(2)-1}, x_{\pi(2)}, \xi_{\pi(2)+1}, \ldots, \xi_N) dx_{\pi(2)} \\ &= \int_{a_{\pi(2)}}^{\xi_{\pi(2)}} f(\xi_1, \ldots, \xi_{\pi(2)-1}, x_{\pi(2)}, \xi_{\pi(2)+1}, \ldots, \xi_N) dx_{\pi(2)}\end{aligned}$$

für alle $\xi \in Q$. Insbesondere folgt mit $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in Q$, $\xi_{\pi(1)} = b_{\pi(1)}$, $\xi_{\pi(2)} = b_{\pi(2)}$ sowie in den inneren Integralen $x = (x_1, \ldots, x_N)$ mit $x_j := \xi_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, N\} \setminus \{\pi(1), \pi(2)\}$, daß gilt:

$$\begin{aligned}\int_{a_{\pi(2)}}^{b_{\pi(2)}} \Big(\int_{a_{\pi(1)}}^{b_{\pi(1)}} f(x) dx_{\pi(1)} \Big) dx_{\pi(2)} &= h_2(\xi) \\ &= \int_{a_{\pi(1)}}^{b_{\pi(1)}} \frac{\partial h_2}{\partial x_{\pi(1)}}(x_1, \ldots, x_{\pi(2)-1}, b_{\pi(2)}, x_{\pi(1)+1}, \ldots, x_N) dx_{\pi(1)} \\ &= \int_{a_{\pi(1)}}^{b_{\pi(1)}} \Big(\int_{a_{\pi(2)}}^{b_{\pi(2)}} f(x)\, dx_{\pi(2)} \Big) dx_{\pi(1)}\,.\end{aligned}$$

Vertauschen der Integrationsreihenfolge führt also zum gleichen Ergebnis. Da sich jede Permutation von $1, 2, \ldots, N$ als Hintereinanderausführung von endlich vielen Transpositionen schreiben läßt, erhalten wir:

11.21. Satz (Elementare Form des Satzes von Fubini). *Seien $I_j := [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, N$, kompakte Intervalle und sei $Q := I_1 \times \cdots \times I_N$. Ist $f : Q \to \mathbb{R}^M$ stetig, so existiert für alle Permutationen π von $1, 2, \ldots, N$ das iterierte Riemann–Integral*

$$I_\pi := \int_{a_{\pi(N)}}^{b_{\pi(N)}} \Big(\int_{a_{\pi(N-1)}}^{b_{\pi(N-1)}} \Big(\ldots \int_{a_{\pi(2)}}^{b_{\pi(2)}} \Big(\int_{a_{\pi(1)}}^{b_{\pi(1)}} f(x)\, dx_{\pi(1)} \Big) dx_{\pi(2)} \Big) \ldots dx_{\pi(N-1)} \Big) dx_{\pi(N)}$$

und es gilt

$$I_\pi = \int_{a_N}^{b_N} \Big(\int_{a_{N-1}}^{b_{N-1}} \Big(\ldots \int_{a_2}^{b_2} \Big(\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, dx_1 \Big) dx_2 \Big) \ldots dx_{N-1} \Big) dx_N$$

Der Wert des Integrals ist also von der Reihenfolge der Integrationen unabhängig.

Aufgrund dieses Satzes definieren wir für stetige Funktionen $f : Q \to \mathbb{R}^M$:

$$\int_Q f(x)\, dx := \int_{a_{\pi(n)}}^{b_n} \Big(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \Big(\ldots \int_{a_2}^{b_2} \Big(\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, dx_1 \Big) dx_2 \Big) \ldots dx_{n-1} \Big) dx_n.$$

Eine sehr viel allgemeinere und besser anwendbare Fassung des Satzes von Fubini werden wir in Analysis 3 nach der Einführung des Lebesgues-Integrals kennenlernen.

Ist $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ eine Funktion, so ist der *Träger* $\operatorname{supp}(f)$ (englisch bzw. französisch: *support*) definiert als die Abschließung der Menge aller $x \in \mathbb{R}^N$ mit $f(x) \neq 0$, also:

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^N\,;\, f(x) \neq 0\}}^{\mathbb{R}^N}.$$

Ist $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger und ist $Q \subset \mathbb{R}^N$ ein achsenparalleler Quader mit $\operatorname{supp}(f) \subseteq Q$, so definieren wir

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx := \int_Q f(x)\,dx\,.$$

Diese Definition ist offensichtlich unabhängig von der speziellen Wahl des achsenparallelen Quaders Q, solange nur Q den Träger von f enthält.

Das folgende Beispiel in zwei Veränderlichen zeigt, daß der Satz von Fubini im allgemeinen nicht für beliebige iterierte Riemann–Integrale gilt selbst, wenn beide iterierten Integrale existieren.

11.22. Beispiel. (Vergl. [17] Chapter 10, Exercise 2.) Zu jedem beschränkten, offenen Intervall (a,b) mit $-\infty < a < b < \infty$ gibt es eine stetige Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset (a,b)$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt = \int_a^b \varphi(t)\,dt = 1$, z.B. die durch

$$\varphi(t) := \max\Big\{0, \frac{4}{b-a}\Big(1 - \frac{4}{b-a}\Big|\frac{a+b}{2} - t\Big|\Big)\Big\}$$

für $t \in \mathbb{R}$ definierte Zackenfunktion. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gibt es also eine stetige Funktion $\varphi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Träger in $(2^{-k}, 2^{1-k})$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t)\,dt = \int_{2^{-k}}^{2^{1-k}} \varphi_k(t)\,dt = 1$. Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_k(x) - \varphi_{k+1}(x))\varphi_k(y) = \varphi_1(x)\varphi_1(y) + \sum_{k=2}^{\infty}\varphi_k(x)(\varphi_k(y) - \varphi_{k-1}(y))$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Offensichtlich gilt $\operatorname{supp} f \subseteq [0,1] \times [0,1]$ und f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig. Man beachte hierzu, daß die Träger der Funktionen φ_k, $k \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt sind. Für $y \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } y \leq 0 \\ 0 & \text{falls } y > 0 \\ (\varphi_k(x) - \varphi_{k+1}(x))\varphi_k(y) & \text{falls } 0 < y \leq 1 \text{ mit } 2^{-k} < x \leq 2^{1-k} \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

und somit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = 0$.

Für $x \in \mathbb{R}$ und alle $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ 0 & \text{falls } x > 0 \\ \varphi_1(x)\varphi_1(y) & \text{falls } 2^{-1} < x \leq 1 \\ \varphi_k(x)(\varphi_k(y) - \varphi_{k-1}(y)) & \text{falls } 0 < x \leq 2^{-1} \text{ mit } 2^{-k} < x \leq 2^{1-k} \\ & \text{für ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geq 2. \end{cases}$$

und damit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \varphi_1(x)$.

Es folgt: Für alle $y \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ stetig auf $\mathbb{R}$ mit Träger in $[0,1]$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ stetig auf $\mathbb{R}$ mit Träger in $[0,1]$. Für die iterierten Riemann–Integrale gilt jedoch

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\Big)\,dy = 0 \neq 1 = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\Big)\,dx\,.$$

Es liegt nahe die Definition des mehrdimensionalen Riemann–Integrals für stetige Funktionen mit kompaktem Träger zu erweitern auf Funktionen, die sich in geeigneter Weise durch Stetige Funktionen mit kompakten Trägern approximieren lassen. Der richtige Rahmen hierfür ist die Theorie des Lebesgue–Integrals, die wir in der Analysis 3 behandeln werden. Wir betrachten hier nur ein einfaches Beispiel, in dem die Approximation naheliegend ist.

Mit S^N bezeichnen wir den *Standard-N-Simplex* im $\mathbb{R}^N$, der definiert ist durch

$$S^N := \big\{x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \,;\, x_1 + \cdots + x_N \leq 1,\ x_k \geq 0 \text{ für } k = 1, \dots, N\big\}.$$

Ferner bezeichne $W^N := [0,1]^N$ den *Standardwürfel der Kantenlänge* 1 im $\mathbb{R}^N$. Mit diesen Bezeichnungen gilt:

11.23. Satz. *Sei $f \in C(S^N, \mathbb{R}^M)$ und sei $F : W^N \to \mathbb{R}^M$ die durch*

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in S^N \\ 0 & \text{für } x \in W^N \setminus S^N \end{cases}$$

definierte, im allgemeinen unstetige Fortsetzung von f auf W^N. Dann existiert das Integral

$$\int_{S^N} f(x)\,dx := \int_{W^N} F(x)\,dx$$

als iteriertes Riemann–Integral und ist von der Integrationsreihenfolge unabhängig.

Beweis. Für $0 < \delta < 1$ definieren wir

$$\varphi_\delta(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t \leq 1-\delta \\ \frac{1-t}{\delta} & \text{für } 1-\delta < t \leq \\ 0 & \text{für } t > 1 \end{cases}$$

und

$$F_\delta(x) := \varphi_\delta(x_1 + \cdots + x_N)F(x) \quad \text{für alle } x = (x_1, \dots, x_N) \in W^N.$$

Die so definierte Funktion F_δ ist nun stetig auf W^N. Jeder Punkt $x \in W^N$ hat eine eindeutige Darstellung der Form $x = (x', x_N)$ mit $x' \in W^{N-1}$, $x_N \in [0,1]$. Ist $x' \in W^{N-1}$ beliebig, so ist die Menge der $x_N \in [0,1]$ mit $F(x', x_N) \neq F_\delta(x', x_n)$ entweder leer oder ein Intervall der Länge $\leq \delta$. daher folgt mit

$$h_N(x') := \int_0^1 F(x', x_N)\,dx_N\,, \qquad h_{N,\delta}(x') := \int_0^1 F_\delta(x', x_N)\,dx_N \qquad (x' \in W^{N-1}),$$

es ist

$$\begin{aligned} |h_N(x') - h_{N,\delta}(x')| &\leq \int_0^1 |F(x', x_N) - F_\delta(x', x_N)|\,dx_N \\ &= \int_0^1 |(1 - \varphi(x_1 + \cdots + x_N))F(x', x_N)|\,dx_N \\ &\leq \delta \|F\|_{W^N} = \delta \|f\|_{S^N}\,, \end{aligned} \tag{11.9}$$

wobei $\|\cdot\|_{W^N}$ bzw. $\|\cdot\|_{S^N}$ die Supremumsnorm auf W^N bzw. S^N sei. Insbesondere ist h_N stetig auf W^{N-1}, da die Folge $h_{N,1/n}$ gleichmäßig auf W^{N-1} gegen h_N konvergiert für $n \to \infty$. Die weiteren Integrationen bereiten also keine Schwierigkeiten. Aus (11.9) folgt für alle $0 < \delta < 1$:

$$\Big|\int_{W^N} F(x)\,dx - \int_{W^N} F_\delta(x)\,dx\Big| \leq \delta \|f\|_{S^N}$$

Da nach Satz 11.21 das Integral $\int_{W^N} F_\delta(x)\,dx$ von der Integrationsreihenfolge unabhängig ist, muß dies auch für $\int_{W^N} F(x)\,dx$ gelten. □

Wir wollen nun einen Transformationssatz für iterierte Riemann-Integrale bei Variablenwechsel herleiten. Wir beginnen mit einfachen Variablensubstitutionen.

11.24. Definition. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen. Eine *einfache Abbildung* $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^N$ ist eine Abbildung der Form

$$\Phi(x) = \sum_{j=1,\, j\neq k}^{N} x_j \mathbf{e}_j + g(x)\mathbf{e}_k = x + (g(x) - x_k)\mathbf{e}_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ g(x) \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}.$$

Hierbei sei $1 \leq k \leq N$ und $g : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. $\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_N$ seien die kanonischen Einheitsvektoren. Eine einfache Abbildung ist also eine Abbildung, die nur eine Koordinate verändert. Sei nun g in einem Punkt $a \in \Omega$ total differenzierbar. Dann unterscheidet sich die Jacobimatrix $J_\Phi(a)$ von Φ Im Punkt a von der Einheitsmatrix nur in der k–ten Zeile. Diese hat die Einträge

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_N}(a)\,.$$

Für die Determinante von $J_\Phi(a)$ erhält man also

$$\det J_\phi(a) = \frac{\partial g}{\partial x_k}(a)\,.$$

$J_\Phi(a)$ ist also genau dann invertierbar, wenn $\frac{\partial g}{\partial x_k}(a) \neq 0$.

Ein weiterer einfacher Typ sind lineare Abbildungen $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$, die zwei Variablen vertauschen, für die es also $j, k \in \{1, 2, \dots, N\}$ gibt mit.

$$V(x) = x + (x_j - x_k)\mathbf{e}_k + (x_k - x_j)\mathbf{e}_j \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^N.$$

Im Fall $j = k$ ist dies die Einheitsmatrix. Da es sich um lineare Abbildungen handelt, stimmen sie mit ihrem totalen Differential überein. Ihre Matrixdarstellungen bezüglich der kanonischen Basis im $\mathbb{R}^N$ sind Permutationsmatrizen und haben (im Fall $j \neq k$) die Determinante -1, da sie aus der Einheitsmatrix durch Vertauschen zweier Zeilen entstehen.

Ferner führen wir die Projektionen $P_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ ein mit

$$P_0(x) := 0, \quad P_j(x) := \sum_{j=1}^{k} x_j \mathbf{e}_j$$

für $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, $1 \leq k \leq N$. Für diese Projektionen gilt nach Definition:

$$\ker P_k = \mathrm{LH}(\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_N)\,, \quad \operatorname{ran} P_k = \mathrm{LH}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k).$$

(Hierbei bezeichnet LH die lineare Hülle).

11.25. Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen mit $0 \in \Omega$ und sei $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N$ mit $F(0) = 0$ und invertierbarer Jacobimatrix $J_F(0)$ in 0 gibt es eine Umgebung U von 0, in der F eine Darstellung der Form*

$$F(x) = (V_1 \circ \cdots \circ V_{N-1} \circ \Phi_N \circ \cdots \circ \Phi_1)(x) \qquad (x \in U) \tag{11.10}$$

besitzt mit einfachen $C^1(U,\mathbb{R}^N)$–Abbildungen, für die gilt

$$\Phi_j(0) = 0, \quad \det J_{\Phi_j}(0) \neq 0, \qquad (x \in U)$$

und linearen Abbildungen $V_1, \ldots, V_{N-1}$ die entweder zwei Variablen vertauschen oder gleich der Identität sind.

Beweis. Wir konstruieren induktiv für $k = 1, \ldots, N$ Nullumgebungen W_k in $\mathbb{R}^N$, Abbildungen $F_k \in C^1(W_k, \mathbb{R}^N)$ mit $F_k(0) = 0$, invertierbarer Jacobimatrix $J_{F_j}(0)$ und

$$P_{k-1}F_k(x) = P_{k-1}x \qquad \text{für alle } x \in W_k. \tag{11.11}$$

Für $k = 1$ sind diese Bedingen erfüllt mit $W_1 := \Omega$, $F_1 := F$.

Sei nun $1 \leq k < N$ und sei W_k eine Nullumgebung in $\mathbb{R}^N$ und sei $F_k \in C^1(W_k, \mathbb{R}^N)$ mit $F_k(0) = 0$ und invertierbarer Jacobimatrix $J_{F_j}(0)$, so daß (11.11) erfüllt ist. Dann gilt nach der Induktionsvoraussetzung für alle $x \in W_k$:

$$F_k(x) = P_{k-1}(x) + \sum_{j=k}^{N} \alpha_j(x)\mathbf{e_j} \tag{11.12}$$

mit $\alpha_k, \ldots, \alpha_N \in C^1(W_k, \mathbb{R})$. Es folgt

$$(DF_k)(0)\mathbf{e}_k = J_{F_k}(0)\mathbf{e}_k = \sum_{j=k}^{N} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k}(0)\mathbf{e}_j.$$

Da $J_{F_k}(0)$ nach Induktionsvoraussetzung invertierbar ist, kann dieser Ausdruck nicht Null sein. Es gibt also ein $m \in \{k+1, \ldots, N\}$ mit $\frac{\partial \alpha_m}{\partial x_k}(0) \neq 0$.

Sei V_k die lineare Abbildung die genau die Variablen x_k und x_m vertauscht. Im Fall $k = m$ ist dies die Einheitsmatrix, sonst ist es eine echte Vertauschungsmatrix. Wir setzen nun

$$\Phi_k(x) := x + (\alpha_m(x) - x_k)\mathbf{e}_k \qquad (x \in W_k).$$

Dann ist Φ_k eine elementare Abbildung mit $\Phi_k(0) = 0$ und $\det J_{\Phi_k}(0) = \frac{\partial \alpha_m}{\partial x_k}(0) \neq 0$. Nach dem Satz 10.14 von der Umkehrfunktion gibt es eine offene Umgebung $U_k \subseteq W_k$ von 0, so daß Φ_k die Umgebung U_k bijektiv auf eine Umgebung W_{k+1} von 0 abbildet und Φ_k^{-1} stetig partiell differenzierbar auf W_{k+1} ist. Wir definieren nun

$$F_{k+1}(\xi) := V_k(F_k \circ \Phi_k^{-1})(\xi)) \qquad (\xi \in W_{k+1}).$$

Dann ist $F_{k+1} \in C^1(W_{k+1}, \mathbb{R}^N)$ mit $F_{k+1}(0) = 0$ und mit der Kettenregel und dem Multiplikationssatz für die Determinanten erhalten wir

$$\det J_{F_{k+1}}(0) = (\det V_k)(\det J_{F_k}(0))(\det J_{\Phi_k}(0))^{-1} \neq 0.$$

Für alle $x \in U_k$ gilt

$$\begin{aligned} P_kF_{k+1}(\Phi_k(x)) =& P_kV_kF_k(x) = P_k(P_{k-1}x + \alpha_m(x)\mathbf{e}_k + \beta_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \cdots + \beta_N\mathbf{e}_N) \\ =& P_{k-1}x + \alpha_m(x)\mathbf{e}_k = P_k\Phi_k(x) \end{aligned}$$

mit $\beta_j(x) = \alpha_j(x)$ für $m \neq j \in \{k+1, \ldots, N\}$ und $\beta_m = \alpha_k$ falls $m \neq k$. Also folgt

$$P_kF_{k+1}(y) = P_ky \qquad \text{für alle } y \in W_{k+1}.$$

Nachdem wir diesen Schritt für $k = 1, \ldots, N-1$ durchgeführt haben erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} F(x) =& F_1(x) = V_1F_2(\Phi_1(x)) = V_1V_2(F_3 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1)(x) = \ldots \\ =& V_1 \ldots V_{N-1}(F_N \circ \Phi_{N-1} \circ \cdots \circ \Phi_1)(x) \end{aligned}$$

für alle x in einer Umgebung U von 0. Da nach Konstruktion $P_{N-1}F_n(x) = P_{N-1}x$ für alle $x \in U$ gilt, ist $\Phi_N := F_N$ eine einfache $C^1(U, \mathbb{R}^N)$–Abbildung und es folgt die Behauptung. $\square$

Mit Hilfe des folgenden Satzes werden wir stetige Funktionen f mit kompaktem Träger zerlegen können in eine Summe von Funktionen mit “kleinen” Trägern.

11.26. Satz (Zerlegung der Eins). *Sei $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine offene Überdeckung einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^N$. Dann gibt es endlich viele stetige Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) $\varphi_j(\mathbb{R}^N) \subseteq [0,1]$ *für alle* $j = 1, \ldots, N$.
(b) *Zu jedem* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *gibt es ein* $\alpha \in A$, *so daß* $\operatorname{supp} \varphi_j$ *eine kompakte Teilmenge von* U_α *ist.*
(c) *Für alle* $\xi \in \mathbb{R}^N$ *gilt* $\varphi_1(x) + \cdots + \varphi_m(x) = 1$.

Ist also $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ *eine stetige Funktion mit* $\operatorname{supp}(f) \subseteq K$, *so gilt*

$$f = \varphi_1 f + \cdots + \varphi_m f$$

mit $\operatorname{supp}(\varphi_j f) \in U_\alpha$ *für ein* $\alpha = \alpha(j) \in A$ *für* $j = 1, \ldots, m$.

Wir nennen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ dann auch eine endliche *Zerlegung* oder*Partition der Eins* zur Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Beweis. Zu jedem $x \in K$ fixieren wir ein $\alpha(x) \in A$ mit $x \in U_{\alpha(x)}$. Dann gibt es ein $\varepsilon(x) > 0$ mit $U_{3\varepsilon(x)}(x) \subseteq U_{\alpha(x)}$. Die Funktion ψ_x mit

$$\psi_x(\xi) := \begin{cases} 1 & \text{für } |\xi - x| \leq \varepsilon(x) \\ 1 - \frac{|\xi - x| - \varepsilon(x)}{\varepsilon(x)} & \text{für } \varepsilon < |\xi - x| \leq 2\varepsilon(x) \\ 0 & \text{für } |\xi - x| > 2\varepsilon(x) \end{cases}$$

hat dann kompakten Träger in $U_{3\varepsilon(x)}(x) \subseteq U_{\alpha(x)}$ und nimmt nur Werte zwischen 0 und 1 an. Da K kompakt ist, gibt es endlich viele $x_1, \ldots, x_m \in K$ mit

$$K \subset U_{\varepsilon(x_1)}(x_1) \cup \ldots \cup U_{\varepsilon(x_m)}(x_m).$$

Wir definieren nun für alle $x \in \mathbb{R}^N$: $\varphi_1(x) := \psi_{x_1}(x)$ und für $2 \leq j \leq m$:

$$\varphi_j(x) := \psi_{x_j}(x) \prod_{k=1}^{j-1} (1 - \psi_{x_k}(x)).$$

Dann sind (a) und (b) für $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ erfüllt und es gilt für $1 \leq k \leq m$

$$\sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x) = 1 - \prod_{j=1}^{k} (1 - \psi_{x_j}(x)) \qquad (x \in \mathbb{R}^N). \tag{11.13}$$

Für $k = 1$ ist dies offensichtlich. Ist (11.13) für ein $k \in \{1, \ldots, m-1\}$ erfüllt, so folgt wegen

$$\sum_{j=1}^{k+1} \varphi_j(x) = 1 - \prod_{j=1}^{k} (1 - \psi_{x_j}(x)) + \psi_{x_{k+1}}(x) \prod_{j=1}^{k} (1 - \psi_{x_j}(x)) \qquad (x \in \mathbb{R}^N)$$

die Gültigkeit von (11.13) auch für $k+1$. Ist $x \in K$ so folgt $x \in U_{\varepsilon(x_j)}(x_j)$ für wenigstens ein $j \in \{1, \ldots, m\}$, also auch $1 - \psi_{x_j}(x) = 0$ und somit nach (11.13) auch die Aussage (c). □

Wir können nun zumindest in einem einfachen Fall den Transformationssatz beweisen:

11.27. Satz (Transformationssatz). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und sei $\Psi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ eine injektive Abbildung mit $\det J_\Psi(x) \neq 0$ für alle $x \in \Omega$. Dann gilt für alle stetigen Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ mit kompaktem Träger und mit $\operatorname{supp} f \subset \Psi(\Omega)$:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(\Psi(x))\big|\det J_\Psi(x)\big|\,dx \tag{11.14}$$

Beweis. Wegen $\det J_\Psi(x) \neq 0$ ist nach dem Satz von der Umkehrfunktion die Menge $\Psi(\Omega)$ wieder offen und die Umkehrabbildung $\Psi^{-1} : \Psi(\Omega) \to \Omega$ stetig differenzierbar. Insbesondere ist daher der Integrand der rechten Seite von (11.14) stetig mit kompaktem Träger in Ω.

Ist $\Phi : Q \to \mathbb{R}^N$ eine einfache Abbildung im Sinne von Definition 11.24 auf einem offenen Quader $Q = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^N$,

$$\Phi(x) = \sum_{j=1,\, j\neq k}^{N} x_j \mathbf{e}_j + g(x)\mathbf{e}_k \qquad (x \in Q)$$

für ein $k \in \{1, \ldots, N\}$ mit $\frac{\partial g}{\partial x_k}(x) \neq 0$ für alle $x \in Q$, so hat man für jede stetige Funktion $h : Q \to \mathbb{R}^N$ mit kompaktem in $\Phi(Q)$ enthaltenen Träger mit der Variablensubstitution $y_k = g(x)$ und $y_j := x_j$ für $k \neq j \in \{1, \ldots, N\}$:

$$\begin{aligned}\int_{[a_k,b_k]} h(\Phi(x))\big|\det J_\Phi(x)\big|\,dx_k &= \int_{[a_k,b_k]} h(x)\Big|\frac{\partial g}{\partial x_k}(x)\Big|\,dx_k \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\,dy_k\end{aligned}$$

und daher nach Satz 11.21

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(y)\,dy = \int_Q h(\Phi(x))\big|\det J_\Phi(x)\big|\,dx.$$

Ist V eine Abbildung, die genau zwei Variablen vertauscht, so ist $|\det J_V(x)| = |\det V| = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$ und nach Satz 11.21 folgt für alle stetigen Funktionen $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ mit kompaktem Träger

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} h(V(x))|\det J_V(x)| = |\det V|\,dx.$$

Also gilt der Satz für alle einfachen Abbildungen und alle Variablenvertauschungen. Ist $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ eine Verschiebung $x \mapsto T(x) := x + b$ für ein $b \in \mathbb{R}^N$, so folgt durch direkte Berechnung des iterierten Riemann–Integrals für alle stetigen Funktionen $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ mit kompaktem Träger:

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} h(x+b)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(T(x))\big|\det J_T(x)\big|\,dx$$

Ist der Satz richtig für zwei Abbildungen Ψ_1, Ψ_2 und ist $\Psi_0 = \Psi_1 \circ \Psi_2$, so folgt für alle stetigen Funktionen h mit kompaktem Träger im Bild von Ψ_1:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} h(y)\,dy &= \int_{\mathbb{R}^N} h(\Psi_1(\xi))\big|\det J_{\Psi_1}(\xi)\big|\,d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} h(\Psi_1(\Psi_2(x)))\big|\det J_{\Psi_1}(\Psi_2(x))\big| \cdot \big|\det J_{\Psi_2}(x)\big|\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} h(\Psi_0(x))\big|\det J_{\Psi_0}(x)\big|\,dx\,,\end{aligned}$$

denn nach der Kettenregel und dem Multiplikationssatz für Determinanten gilt

$$\det(J_{\Psi_1}(\Psi_2(x))) \cdot \det(J_{\Psi_2}(x)) = \det(J_{\Psi_1}(\Psi_2(x))J_{\Psi_2}(x)) = \det J_{\Psi_0}(x)\,.$$

Nun hat nach Satz 11.25 jeder Punkt $a \in \Omega$ eine Umgebung U, in der gilt

$$\Psi(x) = \Psi(a) + (V_1 \circ \cdots \circ V_{k-1} \circ \Phi_k \circ \cdots \circ \Phi_1)(x - a)$$

mit Variablenvertauschungen $V_1, \ldots, V_{k-1}$ und elementaren Abbildungen $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$. Mit $W := \Psi(U)$ folgt also nach dem, was bisher gezeigt wurde, für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ mit kompaktem in W enthaltenen Träger die Gültigkeit von (11.14). Es folgt also: Zu jedem Punkt $y \in \Psi(\Omega)$ gibt es eine Umgebung W_y von y, so daß (11.14) richtig ist für alle stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in W_y.

Sei nun $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ eine beliebige stetige Funktion mit kompaktem Träger $K := \operatorname{supp} f \subset \Psi(\Omega)$. Nach dem Satz 11.26 über die Zerlegung der Eins gibt es dann endlich viele stetige Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ mit kompakten Trägern, so daß $\operatorname{supp} \varphi_j(x) \subset W_{y_j}$ für ein $y_j \in \Psi(\Omega)$, $j = 1, \ldots, m$, und

$$f(x) = \varphi_1(x)f(x) + \cdots + \varphi_m(x)f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^N).$$

Also gilt (11.14) für alle $\varphi_j f$, $j = 1, \ldots, m$ und somit (wegen der Linearität des iterierten Riemann–Integrals) auch für f. $\square$

Die bewiesene Fassung des Transformationssatzes ist noch zu restriktiv. Wir werden später eine besser anwendbare Fassung (im Rahmen der Theorie des Lebesgues–Integrals) beweisen. Durch approximatives Vorgehen wie in Satz 11.23 kann man jedoch auch schon interessante Aussagen erhalten.

11.28. Beispiel. Sei $\Psi : [0, R] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\Psi(r, \varphi) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ für alle $r \in [0, R]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Dann bildet Ψ das Rechteck $Q := [0, R] \times [0, 2\pi]$ surjektiv auf die abgeschlossene Kreisscheibe $D := \overline{U_R(0)}$ in $\mathbb{R}^2$ ab, ist injektiv auf dem Inneren von Q und erfüllt dort $\det J_\Psi(r, \varphi) = r \neq 0$. Indem man ähnlich wie in Satz 11.23 verfährt, zeigt man, daß für alle $f \in C(D, \mathbb{R}^M)$ gilt:

$$\int_D f(y)\, dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(\Psi(r, \varphi)) r \, dr \, d\varphi \,.$$

KAPITEL 12

Der Approximationssatz von Weierstraß

Ziel dieses kurzen Abschnittes ist es, zu zeigen, daß sich jede auf einem kompakten Intervall stetige Funktion gleichmäßig durch Polynomfunktionen approximieren läßt. Wir beweisen zunächst einen abstrakten Approximationssatz.

Sei $I := [a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ ein kompaktes Intervall, $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} := \mathbb{C}$. Eine lineare Abbildung $K : C(I, \mathbb{K}) \to C(I, \mathbb{K})$ heißt *positiv*, falls für alle reellwertigen $f \in C(I, \mathbb{K})$ mit $f \geq 0$ auf I auch gilt $(Kf)(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. Sind dann $f, g \in C(I, \mathbb{K})$ mit $f(x) - g(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, so folgt dann $(Kg)(x) \leq (Kf)(x)$ für alle $x \in I$. Sei ferner $\pi_k : I \to \mathbb{K}$ die Funktion $x \mapsto x^k$ auf I $(k \in \mathbb{N}_0)$.

12.1. Satz (Korovkin, 1953). *Sei $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von positiven Operatoren, so daß für $k = 0, 1, 2$ gilt: $K_n : C(I, \mathbb{K}) \to C(I, \mathbb{K})$ mit $K_n \pi_k \to \pi_k$ gleichmäßig auf I für $n \to \infty$. Dann gilt schon für alle $f \in C(I, \mathbb{K})$:*

$$K_n f \to f \qquad \textit{gleichmäßig für } n \to \infty.$$

Beweis. (a) Sei zunächst $f \in C(I, \mathbb{R})$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wegen der Kompaktheit von I ist f schon gleichmäßig stetig auf I. Es gibt also ein $\delta > 0$ mit

$$\forall x, y \in I \quad |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Dann gilt für alle $x, t \in I$:

$$|f(x) - f(t)| \leq \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2} & \text{falls } |x - t| < \delta \\ 2\|f\|_I \left(\frac{x-t}{\delta}\right)^2 & \text{falls } |x - t| \geq \delta \end{cases}$$

und daher

$$|f(x) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_I \Big(\frac{x - t}{\delta}\Big)^2$$

also auch

$$f(t) - \frac{\varepsilon}{2} - 2\|f\|_I \Big(\frac{x - t}{\delta}\Big)^2 \leq f(x) \leq f(t) + \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_I \Big(\frac{x - t}{\delta}\Big)^2.$$

Wenden wir hierauf bezüglich der Variablen x bei festem $t \in I$ den Operator K_n an, so folgt

$$K_n\Big(f(t) - \frac{\varepsilon}{2} - 2\|f\|_I \Big(\frac{\pi_1 - t}{\delta}\Big)^2\Big)(x) \leq (K_n f)(x) \leq K_n\Big(f(t) + \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_I \Big(\frac{\pi_1 - t}{\delta}\Big)^2\Big)(x).$$

Da die Argumente der äußeren Ausdrücke als Polynome vom Grad < 2 Linearkombinationen von π_0, π_1, π_2 sind, gibt es nach Voraussetzung ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\Big\| f(t) \pm \frac{\varepsilon}{2} \pm +2\|f\|_I \Big(\frac{\pi_1 - t}{\delta}\Big)^2 - K_n\Big(f(t) \pm \frac{\varepsilon}{2} \pm 2\|f\|_I \Big(\frac{\pi_1 - t}{\delta}\Big)^2\Big)\Big\|_I < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir erhalten also für alle $n \geq n_0$, $x, t \in I$:

$$f(t) - \frac{\varepsilon}{2} - 2\|f\|_I \Big(\frac{x - t}{\delta}\Big)^2 - \frac{\varepsilon}{2} < (K_n f)(x) < f(t) + \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_I \Big(\frac{x - t}{\delta}\Big)^2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Speziell mit $t = x$ folgt für alle $n \geq n_0$, $x \in I$:

$$f(x) - \varepsilon < (K_n f)(x) < f(x) + \varepsilon$$

und somit $\|f - K_n f\|_I < \varepsilon$. Also konvergiert $K_n f$ gleichmäßig auf I gegen f für $n \to \infty$.

(b) Ist f komplexwertig, so wenden wir (a) auf $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ an und erhalten ebenfalls die Behauptung. □

Sei nun $I = [0,1]$. Für $f \in C(I, \mathbb{K})$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir, das n–te *Bernsteinpolynom*[1] $B_n(f, \cdot)$ zu f durch

$$B_n(f, x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-k)^{n-k} \qquad (x \in I).$$

Die Abbildung $B_n : f \mapsto B_n(f, \cdot)$ ist offensichtlich linear. Ist $f \geq 0$ auf I, so ist auch $B_n(f, x) \geq 0$ für alle $x \in I$. B_n ist also eine positive lineare Abbildung für alle $n \in \mathbb{N}$.

12.2. Lemma. *Für alle $x \in I$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

(a) $B_n(\pi_0, x) = 1 = \pi_0(x)$.
(b) $B_n(\pi_1, x) = x = \pi_1(x)$.
(c) $B_n(\pi_2, x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} = \pi_2(x) + \frac{x(1-x)}{n}$.

Insbesondere gilt $B_n(\pi_j, \cdot) \to \pi_j$ gleichmäßig auf I für $n \to \infty$.

Beweis. (a) $B_n(\pi_0, x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-k)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1$.

(b) Für alle $x, y \in I$, $n \in \mathbb{N}$, gilt:

$$nx(x+y)^{n-1} = x \frac{\partial (x+y)^n}{\partial x} = x \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Speziell für $y = 1 - x$ folgt also (nach Division durch n):

$$x = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

und damit die Behauptung.

(c) Für $n = 1$ rechnet man dies unmittelbar nach. Für $n \geq 2$ schließen wir, wie folgt:

$$x^2 n(n-1)(x+y)^{n-2} = x^2 \frac{\partial^2 (x+y)^n}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Speziell für $y = 1 - x$ folgt also (nach Division durch $n(n-1)$):

$$x^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

[1] Sergei Natanovich Bernstein (5.3.1880–26.10.1968)

Nach Definition von $B_n(\pi_2, x)$ gilt also für alle $n \geq 2$, $x \in I$:

$$\begin{aligned}
B_n(\pi_2, x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} B_n(\pi_1, x) \\
&= \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}.
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Mit diesem Lemma und dem Satz von Korovkin erhalten wir unmittelbar:

12.3. Satz (Approximationssatz von Weierstraß). *Jede auf* $[0, 1]$ *stetige Funktion kann gleichmässig auf* $[0, 1]$ *durch eine Folge von Polynomfunktionen approximiert werden.*

Beweis. Nach Lemma 12.2 und dem Satz von Korovkin gilt für alle $f \in C([0, 1], \mathbb{K})$: $B_n(f, x) \to f(x)$ gleichmäßig auf $[0, 1]$ für $n \to \infty$.

□