



Übungen zur Vorlesung Analysis II
Sommersemester 2006

Blatt 10

Abgabe: Mittwoch, 28.06.2006 von 11.00 bis 11.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 11.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis II SS 06' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1

(8 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{n} \sin(nx).$$

Zeigen Sie, dass die Folge (f_n) gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen die Nullfunktion konvergiert, aber die Folge der Ableitungen nicht mal punktweise konvergiert.

Aufgabe 2

(5x2=10 Punkte)

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n.$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^s}{n!} z^n$ für $s \in \mathbb{R}.$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (4n^3 - 3n^4) z^n.$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) z^n.$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n.$

Aufgabe 3

(6+6=12 Punkte)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und sei $z_0 \in \mathbb{K}$ beliebig. Zeigen Sie:

(a) Für den Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ gilt

$$(1) \quad R \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

(b) Existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, so gilt (1) in Gleichheit.

Aufgabe 4

(10 Punkte)

Sei A eine nichtleere Menge. Mit $B(A)$ bezeichnen wir die Menge aller beschränkten Funktionen $f : A \rightarrow \mathbb{K}$. $B(A)$ wird versehen mit der Supremumsmetrik

$$d_{\infty}(f, g) := \sup_{a \in A} |f(a) - g(a)|$$

zu einem metrischen Raum (dies brauchen Sie nicht zu beweisen). Zeigen Sie, dass $B(A)$ vollständig ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 5***(3+3=6 Punkte)**

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{n + \log n}{n^2}\right) z^n.$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\log n}\right)^{n^2} z^n.$

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss06/ana2/ana2.html