



Übungen zur Vorlesung Analysis II  
Sommersemester 2006

Blatt 11

**Abgabe:** Mittwoch, 05.07.2006 von 11.00 bis 11.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 11.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis II SS 06' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

---

**Aufgabe 1**

(2+6+4=12 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Die Abbildung  $\det : \text{Mat}_{M \times M}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig.  
(b) Die Menge  $\text{GL}(M, \mathbb{R})$  ( $:= \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ) ist offen in  $\text{Mat}_{M \times M}(\mathbb{R})$  und die Abbildung

$$\text{Inv} : \text{GL}(M, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{M \times M}(\mathbb{R}), \quad A \mapsto A^{-1}$$

ist stetig.

(Hinweis: Verwenden Sie die Cramersche Regel.)

- (c) Die Abbildung  $\text{Inv}$  ist total differenzierbar. Bestimmen Sie das totale Differential von  $\text{Inv}$  in jedem Punkt  $A \in \text{GL}(M, \mathbb{R})$ .

(Hinweis: Verwenden Sie die Definition der totalen Differenzierbarkeit und nutzen Sie aus, dass für  $A \in \text{GL}(M, \mathbb{R})$  und  $H \in \text{Mat}_{M \times M}$  nahe bei Null gilt (Beweis!):

$$(A + H)^{-1} - A^{-1} = -A^{-1}HA^{-1} + (A^{-1} - (A + H)^{-1})HA^{-1}.$$

---

**Aufgabe 2**

(5+4+3=12 Punkte)

- (a) Sei  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass  $f$  genau dann stark kontrahierend ist, wenn  $|f'(x)| < 1$  für alle  $x \in [a, b]$  gilt.  
(b) Zeigen Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz, dass die Gleichung

$$2x - \sin x = \frac{1}{2}$$

genau eine Lösung im Intervall  $[0, \frac{\pi}{2}]$  besitzt.

- (c) Wie viele Iterationsschritte sind nötig, um den Fixpunkt mit einer Genauigkeit von  $10^{-3}$  zu bestimmen? Nehmen Sie  $x_0 := 0$  als Startpunkt Ihrer Iteration.
- 

**Aufgabe 3**

(10 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) = x^2y + y^3 - 3y + x.$$

Für welche Punkte  $x_0 \in \mathbb{R}$  existieren ein offenes Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  mit  $x_0 \in I$  und eine unendlich oft differenzierbare Funktion  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x_0) = 1$  und  $F(x, g(x)) = 0$  für alle  $x \in I$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.

---

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 4****(6 Punkte)**

Sei  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion wie in Aufgabe 3. Berechnen Sie nahe  $x_0$  die Ableitung  $g'$  von  $g$  in Abhängigkeit von  $x$  und  $g(x)$ .

---

**Aufgabe 5\*****(2+4=6 Punkte)**

Betrachten Sie die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{n!}.$$

- (a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius.
  - (b) Zeigen Sie, dass die Reihe in den Punkten  $\exp(\frac{2\pi i}{k})$  für  $k \in \mathbb{N}$  divergiert.
- 

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

[www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss06/ana2/ana2.html](http://www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss06/ana2/ana2.html)