UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Sommersemester 2006

Blatt 11

Abgabe: Mittwoch, 05.07.2006 von 11.00 bis 11.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 11.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis II SS 06' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1 **(2+6+4=12 Punkte)**

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Abbildung $\det : \mathrm{Mat}_{M\times M}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ist stetig.

(b) Die Menge $\mathrm{GL}(M,\mathbb{R})$ $(:= \det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\}))$ ist offen in $\mathrm{Mat}_{M\times M}(\mathbb{R})$ und die Abbildung

$$\mathrm{Inv} : \mathrm{GL}(M,\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{M\times M}(\mathbb{R}), \qquad A \mapsto A^{-1}$$

ist stetig.
(Hinweis: Verwenden Sie die Cramersche Regel.)

(c) Die Abbildung Inv ist total differenzierbar. Bestimmen Sie das totale Differential von Inv in jedem Punkt $A \in \mathrm{GL}(M,\mathbb{R})$.
(Hinweis: Verwenden Sie die Definition der totalen Differenzierbarkeit und nutzen Sie aus, dass für $A \in \mathrm{GL}(M,\mathbb{R})$ und $H \in \mathrm{Mat}_{M\times M}$ nahe bei Null gilt (Beweis!):

$$(A+H)^{-1} - A^{-1} = -A^{-1}HA^{-1} + (A^{-1} - (A+H)^{-1})HA^{-1}.)$$

Aufgabe 2 **(5+4+3=12 Punkte)**

(a) Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann stark kontrahierend ist, wenn $|f'(x)| < 1$ für alle $x \in [a,b]$ gilt.

(b) Zeigen Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz, dass die Gleichung

$$2x - \sin x = \frac{1}{2}$$

genau eine Lösung im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ besitzt.

(c) Wie viele Iterationsschritte sind nötig, um den Fixpunkt mit einer Genauigkeit von 10^{-3} zu bestimmen? Nehmen Sie $x_0 := 0$ als Startpunkt Ihrer Iteration.

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**

Betrachten Sie die Funktion

$$F : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = x^2y + y^3 - 3y + x.$$

Für welche Punkte $x_0 \in \mathbb{R}$ existieren ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I$ und eine unendlich oft differenzierbare Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ mit $g(x_0) = 1$ und $F(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in I$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

Sei $g : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion wie in Aufgabe 3. Berechnen Sie nahe x_0 die Ableitung g' von g in Abhängigkeit von x und $g(x)$.

Aufgabe 5* **(2+4=6 Punkte)**

Betrachten Sie die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{n!}.$$

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe in den Punkten $\exp(\frac{2\pi i}{k})$ für $k \in \mathbb{N}$ divergiert.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss06/ana2/ana2.html`