



Übungen zur Vorlesung Analysis II
Sommersemester 2006

Blatt 2

Abgabe: Mittwoch, 03.05.2006 von 11.00 bis 11.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 11.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis II SS 06' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1 (Frullani-Integrale)

(6+5=11 Punkte)

- (a) Seien $a, b > 0$ und sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, für die das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$$

existiert. Zeigen Sie, dass dann das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$ existiert und es gilt

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \log\left(\frac{b}{a}\right).$$

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{\delta a}^{\delta b} \frac{f(x)}{x} dx$$

für alle $\delta > 0$ gilt.)

- (b) Zeigen Sie für $t > 0$

$$\log(t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos(x) - \cos(tx)}{x} dx.$$

Aufgabe 2

(10 Punkte)

Seien a und b positive reelle Zahlen. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse

$$E := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 3**(5+4=9 Punkte)**

Die Gamma-Funktion ist für $x > 0$ definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

- (a) Zeigen Sie die Funktionalgleichung der Gamma-Funktion:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

für alle $x > 0$.

- (b) Zeigen Sie weiter, dass

$$\Gamma(n+1) = n!$$

für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 4**(5+5=10 Punkte)**

- (a) Zeigen Sie, dass das uneigentlich Riemann-Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} dx$$

existiert und berechnen Sie seinen Wert.

- (b) Zeigen Sie mit Hilfe des Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale, dass das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \cos(x) dx$$

existiert.

Aufgabe 5***(6 Punkte)**

Existiert das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin(x)}{1+x^2} dx?$$

Informationen zu den Übungsgruppen

Die erste Freitagsübungsgruppe findet am 28.04.2006 und die ersten Dienstagsübungsgruppen am 02.05.2006 statt. Wegen des Feiertages gibt es eine gemeinsame Saalübung für alle Montagsübungsgruppen. Diese findet am 03.05.2006 von 16-18 Uhr in Hörsaal III der Mathematik statt.