**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

## Übungen zur Vorlesung Analysis II

Sommersemester 2006

**Blatt 3**

**Abgabe:** Mittwoch, 10.05.2006 von 11.00 bis 11.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 11.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis II SS 06' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

---

**Aufgabe 1** (Zustandsgleichung idealer Gase) **(4 Punkte)**

Für ein ideales Gas mit Druck $P$, Volumen $V$ und absoluter Temperatur $T$ gilt die Zustandsgleichung

$$PV = cT,$$

wobei $c$ eine Konstante ist. Zeigen Sie, dass für ein solches Gas die Beziehung

$$\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V} = -1$$

besteht.

---

**Aufgabe 2** **((3+3)+(4+4)=14 Punkte)**

(a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der folgenden Funktionen:

(i) $f(x,y) := x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 10.$

(ii) $f(x,y,z) := xyz\sin(x+y+z).$

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen, $v \in C^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ und $f,g \in C^2(\Omega,\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass gilt

(i) div (rot v) = 0.

(ii) $\triangle(fg) = f\triangle g + 2\nabla f\nabla g + g\triangle f.$

---

**Aufgabe 3** **(10 Punkte)**

Sei die Funktion $f$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass $f$ zweimal partiell differenzierbar ist auf ganz $\mathbb{R}^2$, aber $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ gilt. Ist $f$ stetig auf $\mathbb{R}^2$?

---

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 4** **(5+7=12 Punkte)**
Mit $\mathrm{Mat}_{M\times N}(\mathbb{R})$ sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum der $(M \times N)$-Matrizen über $\mathbb{R}$ bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) Durch

$$\|A\| := \sup\{|A \cdot x| \,;\, x \in \mathbb{R}^N,\, |x| \leq 1\} \qquad (A \in \mathrm{Mat}_{M\times N}(\mathbb{R}))$$

(wobei $|\cdot|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^N$ bzw. $\mathbb{R}^M$ bezeichnet) wird eine Norm auf $\mathrm{Mat}_{M\times N}(\mathbb{R})$ definiert. Sind $A \in \mathrm{Mat}_{M\times N}(\mathbb{R})$ und $B \in \mathrm{Mat}_{N\times R}(\mathbb{R})$, dann gilt

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

(b) Durch

$$\|A\|_2 := \Big( \sum_{\substack{i=1,\dots,M \\ j=1,\dots,N}} a_{ij}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \qquad (A \in \mathrm{Mat}_{M\times N}(\mathbb{R}))$$

wird eine Norm auf $\mathrm{Mat}_{M\times N}(\mathbb{R})$ definiert. Sind $A \in \mathrm{Mat}_{M\times N}(\mathbb{R})$ und $B \in \mathrm{Mat}_{N\times R}(\mathbb{R})$, dann gilt $\|A\cdot B\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|B\|_2$. Zeigen Sie, dass die Abschätzung

$$\|A\| \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{N}\, \|A\|$$

für alle $A \in \mathrm{Mat}_{M\times N}(\mathbb{R})$ gilt.

---

**Aufgabe 5*** (Wiederholung zur Analysis I) **((2+2)+5=9 Punkte)**

(a) Berechnen Sie die Ableitung von

(i) $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{-u^2} du.$

(ii) $f(x) = \displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x} u^3 du.$

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und seien $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$$

differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung $F'$ von $F$.

---

## Informationen zu den Übungsgruppen

- Eine Anmeldung zu den Übungsgruppen ist nur noch bis 05.05.2006 möglich!
- Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss06/ana2/ana2.html`