UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Sommersemester 2006

Blatt 4

Abgabe: Mittwoch, 17.05.2006 von 11.00 bis 11.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 11.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis II SS 06' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1 **((3+3)+4=10 Punkte)**

(a) Berechnen Sie die Richtungsableitung der folgenden Funktionen in den angegebenen Punkten a in Richtung der angegebenen Vektoren u:

(i) $f(x,y) := x^2 + y^2, \qquad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$

(ii) $f(x,y,z) := x^2 + ze^y, \qquad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$

(b) Berechnen Sie die Jacobimatrix J_f der Funktion

$$f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)) = (z^2 e^{xy}, xye^{2yz}).$$

Aufgabe 2 **(10 Punkte)**

Untersuchen Sie die folgende Funktion auf partielle und totale Differenzierbarkeit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \sqrt{|xy|}.$$

Aufgabe 3 **(5+5=10 Punkte)**

Berechnen Sie die Jacobimatrizen und deren Determinante der folgenden Abbildungen in jedem Punkt des jeweiligen Definitionsbereiches

(i) $k : (0,\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad (r,\theta,\varphi) \mapsto (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$

(ii) $z : (0,\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad (r,\theta,z) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z).$

Aufgabe 4 **(5+5=10 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Mengen wieder konvex ist.

(b) Sei Ω eine offene, konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Besitzt $f \in C^1(\Omega)$ in Ω beschränkte partielle Ableitungen, so ist f Lipschitz-stetig in Ω.

Bitte wenden!

Aufgabe 5* **(8 Punkte)**

Sei $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Zeigen Sie die folgende Aussage:
Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine total differenzierbare Abbildung mit $J_f(x) = A$ für alle $x \in \Omega$, so gibt es ein $b \in \mathbb{R}^m$ mit $f(x) = Ax + b$ für alle $x \in \Omega$.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss06/ana2/ana2.html`