



Übungen zur Vorlesung Analysis II
Sommersemester 2006

Blatt 5

Abgabe: Mittwoch, 24.05.2006 von 11.00 bis 11.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 11.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis II SS 06' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1

(10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass es eine differenzierbare Funktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $f(x, y) = \varphi(x + y)$.

Aufgabe 2

(10 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von $f(x, y) = (x + 2y)^3$ um den Punkt $(-1, 1)$.

Aufgabe 3

(10 Punkte)

Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ *homogen vom Grad α* ($\alpha > 0$), falls für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle reelle und positive t gilt

$$f(tx) = t^\alpha f(x).$$

Zeigen Sie, dass die Eulersche Relation

$$f \text{ ist homogen vom Grad } \alpha \iff \langle \text{grad } f(x), x \rangle = \alpha f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

gilt.

Aufgabe 4

(10 Punkte)

Bestimmen Sie die Extrema von $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + (2x^2 - 1)y^2$.

Aufgabe 5*

(4 Punkte)

Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ eine Funktion mit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass es Funktionen $u, v \in C^2(\mathbb{R})$ gibt, so dass gilt

$$f(x, y) = u(x) + v(y)$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(Hinweis: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss06/ana2/ana2.html