



Übungen zur Vorlesung Analysis II  
Sommersemester 2006

Blatt 6

**Abgabe:** Mittwoch, 31.05.2006 von 11.00 bis 11.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 11.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis II SS 06' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

---

**Aufgabe 1**

(9 Punkte)

Berechnen Sie das totale Differential der Abbildung

$$g : \text{Mat}_{N \times N}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{N \times N}(\mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad g(A) := A^T A.$$

(Hierbei sei mit  $A^T$  die zu  $A$  transponierte Matrix bezeichnet.)

---

**Aufgabe 2**

(10 Punkte)

Entwickeln Sie die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = xe^{x-y}$  im Punkt  $(0, 0)$  nach dem Taylorschen Satz bis zur zweiten Ordnung und geben Sie das Restglied dritter Ordnung explizit an.

---

**Aufgabe 3**

(5+5=10 Punkte)

Seien die Funktionen  $u$  und  $v$  definiert durch

$$u(x, y) = \frac{1}{r^2} \sin(x^3 + y^4) \quad \text{und} \quad v(x, y) = \frac{1}{r^2} (\cos(x^3 + y^4) - 1),$$

wobei  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$  und  $u(0, 0) = v(0, 0) = 0$  ist.

- (a) Untersuchen Sie die partielle Differenzierbarkeit von  $u$  im Nullpunkt.
  - (b) Zu welcher Klasse  $C^k(\mathbb{R}^2)$  mit maximalem  $k$  gehört  $u$  bzw.  $v$ ?
- 

**Aufgabe 4**

(6+5=11 Punkte)

- (a) Sei  $\Omega$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^N$ . Zeigen Sie, dass es eine Folge  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  abgeschlossener und beschränkter Teilmengen von  $\Omega$  gibt mit den folgenden Eigenschaften:

- (i)  $K_n \subset \text{int}(K_{n+1})$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,
- (ii)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$ .

Bitte wenden!

(b) Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  offen. Für  $f \in C(\Omega)$  und  $K \subset \Omega$  beschränkt und abgeschlossen, setze

$$\|f\|_K := \sup\{|f(x)|; x \in K\}.$$

Sei  $(K_n)$  eine Folge wie in Teil (a). Zeigen Sie, dass durch

$$d(f, g) := \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{\|f - g\|_{K_j}}{1 + \|f - g\|_{K_j}} \quad (f, g \in C(\Omega))$$

eine Metrik auf  $C(\Omega)$  definiert wird.

---

**Aufgabe 5\*** (Methode der kleinsten Quadrate)

**(6 Punkte)**

Bestimmen Sie zu  $n$  vorgegebenen Messwertpaaren  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  diejenigen Geraden  $y = a + bx$ , für die der Ausdruck

$$F(a, b) := \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2$$

minimal wird.

---

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

[www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss06/ana2/ana2.html](http://www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss06/ana2/ana2.html)