**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

# Übungen zur Vorlesung Analysis II

Sommersemester 2006

## Blatt 7

**Abgabe:** Mittwoch, 07.06.2006 von 11.00 bis 11.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 11.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis II SS 06' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

---

**Aufgabe 1** **(4x3=12 Punkte)**

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, $A, B \subset X$ und $a \in X$. Wir nennen $a$ einen *Randpunkt* von $A$, wenn in jeder Umgebung von $a$ mindestens ein Punkt aus $A$ und mindestens ein Punkt aus $X \setminus A$ liegt. Mit $\partial A$ bezeichnen wir den *Rand* von $A$, d. h. die Menge aller Randpunkte von $A$.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $A$ offen $\iff A \cap \partial A = \emptyset$.

(b) $A$ abgeschlossen $\iff \partial A \subset A$.

(c) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$.

(d) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

---

**Aufgabe 2** **(4+4=8 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass

$$\delta(x, y) := \arctan |x - y|$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert.

(b) Sei $d(x, y) = |x - y|$ die übliche Metrik auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das System der bzgl. $\delta$ offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit dem System der bzgl. $d$ offenen Teilmengen übereinstimmt.

---

**Aufgabe 3** **(10 Punkte)**

Sei $n \geq 2$ und $f$ eine stetige reelle Funktion in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass es unendlich viele Paare diametraler Punkte $x, -x$ gibt mit $f(x) = f(-x)$.
(Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\varphi(x) := f(x) - f(-x)$ und wenden Sie den Zwischenwertsatz an.)

---

**Aufgabe 4** **(3+4+3=10 Punkte)**

Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ sind kompakt?

(a) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^3 + 3xy + y^2 < 1\}$.

(b) $B := \{(t, \frac{\sin t}{t^2}); 0 < t \leq 1\}$.

**Bitte wenden!**

(c) $C := \{(x, y) \in [0, 1]^2; g(x, y) = f(x, y)^2\}$, wobei $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen sind.

---

**Aufgabe 5*** **(2+2=4 Punkte)**

Sei $X$ ein metrischer Raum und $A, B \subset X$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\mathrm{int}(A \cup B) \supset \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B)$.

(b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

---

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss06/ana2/ana2.html`