UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Sommersemester 2006

Blatt 8

Abgabe: Mittwoch, 14.06.2006 von 11.00 bis 11.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 11.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis II SS 06' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1 **(2+3+5+3=13 Punkte)**

Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Zwei Normen $|\cdot|_1$ und $|\cdot|_2$ auf E heißen *äquivalent*, in Zeichen $|\cdot|_1 \sim |\cdot|_2$, wenn es Konstanten $a, b > 0$ gibt mit

$$a|x|_1 \leq |x|_2 \leq b|x|_1 \qquad \text{für alle } x \in E.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Sei E endlichdimensional mit Basis $B := \{x_1, ..., x_N\}$. Für beliebiges $x \in E$ existieren dann eindeutige Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_N \in \mathbb{K}$ mit $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_N x_N$. Definiere

$$|x|_{B,\infty} := \max\{|\lambda_1|, ..., |\lambda_N|\}.$$

Zeigen Sie: $|\cdot|_{B,\infty}$ ist eine Norm auf E.

(c) Seien E, B und $|\cdot|_{B,\infty}$ wie in (b), und sei $|\cdot|$ eine Norm auf E. Zeigen Sie: Es gibt eine Konstante $C > 0$ mit

$$|x| \leq |x|_{B,\infty} \cdot \sum_{j=1}^{N} |x_j| \quad \text{und} \quad |x|_{B,\infty} \leq C|x| \quad \text{für } x \in E.$$

Hinweis: Um die Existenz von C nachzuweisen, zeigen Sie, dass

$$\inf\{|x|\,;\, x \in E,\ |x|_{B,\infty} = 1\} > 0.$$

Verwenden Sie dabei, dass die Menge

$$\{(\lambda_1, ..., \lambda_N) \in \mathbb{K}^N\,;\, \max\{|\lambda_1|, ..., |\lambda_N|\} = 1\}$$

abgeschlossen und beschränkt ist (Beweis!).

(d) Zeigen Sie: Ist E endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, so sind alle Normen auf E jeweils zueinander äquivalent. Schließen Sie, daraus, dass jeder normierte endlichdimensionale Raum vollständig ist.

Aufgabe 2 **(4+4=8 Punkte)**

Seien (X_i, d_i) für $i = 1, 2, 3$ metrische Räume. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sind $g : X_1 \to X_2$ und $f : X_2 \to X_3$ stetig, so ist auch $f \circ g : X_1 \to X_3$ stetig.

(b) Ist (X_1, d_1) kompakt und $f : (X_1, d_1) \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f auf X_1 beschränkt und es gibt $x_1, x_2 \in X_1$ mit

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

für alle $x \in X_1$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**
Sei X ein kompakter metrischer Raum und Y ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ schon gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 4 **(4+5=9 Punkte)**
Seien a_i und b_i für $i = 1, \ldots, n$ beliebige (reelle oder komplexe) Zahlen und seien weiter $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) Zeigen Sie die Höldersche Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (a) die Minkowskische Ungleichung

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

wobei $p \geq 1$ ist.

Aufgabe 5* **(6 Punkte)**
Sei $a > 0$. Bestimmen Sie die relativen und absoluten Extrema der Funktion

$$f(x, y) = e^{xy} + x^2 + ay^2.$$

Informationen zu den Übungsgruppen an Pfingstmontag

Wegen des Feiertages am Montag den 05.06.2006, gibt es eine gemeinsame Saalübung für alle Montagsübungsgruppen. Diese findet am 07.06.2006 von 16-18 Uhr in Hörsaal III der Mathematik statt.