**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

## Übungen zur Vorlesung Analysis II

Sommersemester 2006

### Blatt 9

**Abgabe:** Mittwoch, 21.06.2006 von 11.00 bis 11.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 11.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis II SS 06' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

---

**Aufgabe 1** **(12 Punkte)**

Auf dem Vektorraum $V := C^0([0,1],\mathbb{R})$ betrachte die Normen

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

und

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|dx.$$

Zeigen Sie, dass die durch $\|f\|_\infty = 1$ bzw. durch $\|f\|_1 = 1$ bestimmten Teilmengen von $V$ in $(V, \|\cdot\|_\infty)$ bzw.$(V, \|\cdot\|_1)$ zwar abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt sind.

---

**Aufgabe 2** **(5+6=11 Punkte)**

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz ($n \in \mathbb{N}$):

(a) $f_n : [0, 2006] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$.

(b) $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) = nx(1-x^2)^n$.

---

**Aufgabe 3** **(6+5=11 Punkte)**

Sei $(K, d)$ ein kompakter metrischer Raum und seien $f_n, f : K \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ stetige Funktionen mit

(i) $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}, x \in K$;

(ii) $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ punktweise auf $K$.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für $\varepsilon > 0$ ist die Familie $(U_n)_{n=1}^\infty$ mit

$$U_n := \{x \in K : f_n(x) - f(x) < \varepsilon\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

eine offene Überdeckung von $K$.

(b) $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ gleichmäßig auf $K$.

---

**Bitte wenden!**

Sei $\Omega$ eine nicht leere Teilmenge des $\mathbb{R}^N$. Eine Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ von Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^M$ heißt *lokal gleichmäßig konvergent auf* $\Omega$ gegen eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$, falls es zu jedem $x \in \Omega$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ auf $U_\delta(x) \cap \Omega$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert.

**Aufgabe 4** **(6 Punkte)**
Zeigen Sie die folgende Bemerkung aus der Vorlesung:
Ist $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine auf $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^N$ lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ konvergente Folge von auf $\Omega$ stetigen $\mathbb{R}^M$-wertigen Funktionen, so ist auch die Grenzfunktion stetig.

---

**Aufgabe 5*** **(5 Punkte)**
Zeigen Sie, dass die Exponentialreihe auf $\mathbb{R}$ lokal gleichmäßig konvergiert, aber nicht gleichmäßig.

---

## Informationen zur Anmeldung beim Prüfungsamt

Studierende im Bachelorstudiengang Mathematik müssen sich beim Prüfungssekretariat für die Klausur anmelden. Dazu wurden folgende Informationen ausgegeben:

### BACHELORPRÜFUNG IM STUDIENGANG MATHEMATIK

Die Anmeldung zu den Klausuren

| | |
|---|---|
| Praktische Mathematik | Klausurtermin: 20.07.2006 |
| Analysis II | Klausurtermin: 24.07.2006 |
| Lineare Algebra II | Klausurtermin: 27.07.2006 |
| Analysis 1b | Klausurtermin: 15.07.2006 |

erfolgen im Zeitraum

**26. Juni 2006 - 30. Juni 2006**
9.00 - 11.00 Uhr

im Prüfungssekretariat (Geb. E2 4, Zi. 103). Bei der Anmeldung ist das Studienbuch mit dem Belegblatt des SS 2006 vorzulegen.

Studierende, die zum Sommersemester 2006 das Studium begonnen haben, müssen mit der Anmeldung zur ersten Lehrveranstaltung, in der eine Prüfungsleistung erbracht wird, einen Antrag auf Zulassung zur Bachelor-Prüfung stellen. Dazu sind vorzulegen:

1. Studienbuch mit Belegblatt des laufenden Semesters,
2. Zeugnis der allgemeinen Hochschulreife, bzw. gleichwertig anerkanntes Zeugnis,
3. Erklärung, ob bereits eine Diplom- oder Staatsexamens-Vor-/bzw. Hauptprüfung oder Bachelor-/Masterprüfung im Studiengang Mathematik endgültig nicht bestanden wurde bzw. ob die Kandidatin/der Kandidat sich in einem schwebenden Zulassungs- oder Prüfungsverfahren befindet (*Formblatt*)
4. Schriftlicher Antrag auf Zulassung zur Bachelorprüfung (*Formblatt*)