UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Sommersemester 2007

Blatt 1

Abgabe: Dienstag, 24.04.2007 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS IV, Gebäude E2 4 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'FT SS 07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**

Käpt'n Schwarzbart, der alte Haudegen, hinterließ bei seinem unerwarteten Ableben im Alter von 107 Jahren auch eine Schatzkarte.

> Gehe direkt vom Galgen zur Palme, dann gleich viele
> Schritte unter rechtem Winkel nach rechts
> - stecke die erste Fahne!
>
> Gehe vom Galgen zu den drei Felsbrocken, genausoweit
> unter rechtem Winkel nach links
> - stecke die zweite Fahne!
>
> Der Schatz steckt in der Mitte zwischen den beiden Fahnen.

Die Erben starteten sofort eine Expedition auf die Schatzinsel. Die Palme und die markanten Felsbrocken waren sofort zu identifizieren. Vom Galgen war keine Spur mehr zu finden. Dennoch stieß man beim ersten Spatenstich auf die Schatztruhe, obwohl man die Schritte von einer (zufälligen und sehr wahrscheinlich) falschen Stelle aus gezählt hatte. Wie war das möglich? Wo lag der Schatz?
(Hinweis: Rechnen Sie in $\mathbb{C}$.)

Aufgabe 2 **(8 Punkte)**

Sei $M \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend und sei $f : M \to \mathbb{C}$ stetig. Zeigen Sie, dass dann auch $f(M)$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 3 **(4x3=12 Punkte)**

Die stereographische Projektion. Sei

$$\mathbb{S} := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \right\}$$

die *Riemannsche Zahlenkugel* und $x_\infty := (0, 0, 1)$ ihr Nordpol. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildungen

$$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{S}^2 \setminus \{x_\infty\}, \quad z \mapsto \left(\frac{\operatorname{Re} z}{1 + |z|^2}, \frac{\operatorname{Im} z}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2}{1 + |z|^2} \right)$$

und

Bitte wenden!

$$\psi : \mathbb{S}\backslash\{x_\infty\} \to \mathbb{C}, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

sind stetig und invers zueinander. Deuten Sie φ und ψ geometrisch. Wir definieren noch $\varphi(\infty) := x_\infty$ und $\psi(x_\infty) := \infty$.

(b) Für die durch $d_c(z, w) := |\varphi(z) - \varphi(w)|$ für alle $z, w \in \widehat{\mathbb{C}}$ definierte *chordale Metrik* gilt:

$$d_c(z, w) = d_c(w, z) = \frac{|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}} \qquad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}$$

und

$$d_c(z, \infty) = d_c(\infty, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

(c) Geraden in $\mathbb{C}$ werden von φ in Kreislinien in $\mathbb{S}$ durch den Nordpol überführt. Umgekehrt wird jede Kreislinie in $\mathbb{S}$ durch den Nordpol von ψ in eine Gerade in $\mathbb{C}$ überführt.

Hinweis: Eine Kreislinie in $\mathbb{S}$ ist der Schnitt von $\mathbb{S}$ mit einer Ebene in $\mathbb{R}^3$.

(d) Kreislinien in $\mathbb{C}$ werden von φ in Kreislinien in $\mathbb{S}\backslash(0, 0, 1)$ überführt. Umgekehrt werden Kreislinien in $\mathbb{S}\backslash(0, 0, 1)$ von ψ in Kreislinien in $\mathbb{C}$ überführt.

Aufgabe 4 **(10 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Menge

$$K := \left\{ t + i \sin\left(\frac{1}{t}\right) ; t \in (0, 2007] \right\} \cup \{it; t \in [-1, 1]\} \subset \mathbb{C}$$

kompakt und zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 5* **(3+3+4=10 Punkte)**

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sind M, N zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{C}$ mit $M \cap N \neq \emptyset$, so ist auch $M \cup N$ eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$.

(b) Ist M eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$, so ist auch der Abschluss $\overline{M}$ eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$.

(c) Sind Z_1 und Z_2 Zusammenhangskomponenten von $M \subset \mathbb{C}$, so sind Z_1 und Z_2 entweder disjunkt oder sie stimmen überein.

Informationen zur Bepunktung der Aufgaben und zum Skript

- Punkte aus *-Aufgaben tragen nicht zur maximal erreichbaren Punktzahl bei, werden jedoch, wenn Sie eine solche bearbeiten, wie Punkte aus normalen Aufgaben gewertet. Auf diesem Blatt sind also 40 Punkte = 100%, aber Sie können 50 Punkte erreichen.
- Die Übungsgruppen beginnen in der Woche vom 23. April mit der Besprechung dieses Übungsblattes. Entnehmen Sie bitte den Aushängen am schwarzen Brett in Gebäude E2 5, in welche Übung Sie eingeteilt wurden.
- Zur Vorlesung wird es ein Skript geben. Dieses finden Sie unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss07/ft/vorlesung.html`