UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Sommersemester 2007

Blatt 2

Abgabe: Montag, 30.04.2007 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS 001, Gebäude E1 3 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'FT SS 07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1 **(4+2+2+2=10 Punkte)**

Für $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ sei $U_{c,\varepsilon}(w) := \{z \in \widehat{\mathbb{C}}\,;\, d_c(w,z) < \varepsilon\}$ die ε–Umgebung von w in $\widehat{\mathbb{C}}$ bezüglich der chordalen Metrik.

(a) Zeigen Sie: Für $w \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon < d_c(w,\infty)$ ist $U_{c,\varepsilon}(w)$ eine offene Kreisscheibe in $\mathbb{C}$. Geben Sie den euklidischen Mittelpunkt und den euklidischen Radius dieser Kreisscheibe an.

(b) Beschreiben Sie $U_{c,\varepsilon}(w)$ für $w \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon := d_c(w,\infty)$ geometrisch.

(c) Beschreiben Sie $U_{c,\varepsilon}(w)$ für $w \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > d_c(w,\infty)$ geometrisch.

(d) Beschreiben Sie $U_{c,\varepsilon}(\infty)$ für alle $\varepsilon > 0$ geometrisch.

Aufgabe 2 **(3+3+4=10 Punkte)**

Für diejenigen unter Ihnen, denen die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ noch nicht bekannt ist, definieren wir diese durch

$$\exp(z) := e^x(\cos(y) + i\sin(y))\,,$$

für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

(b) Die Funktion exp ist auf $\mathbb{C}$ holomorph und es gilt $\exp' \equiv \exp$ auf $\mathbb{C}$.

(c) Jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat eine eindeutige Darstellung der Form $z = r\exp(i\varphi)$ mit $r > 0$ und $0 \le \varphi < 2\pi$. Man nennt φ dann das *Argument* von z und schreibt $\mathrm{Arg}(z) = \varphi$.

Aufgabe 3 **(3+3+4=10 Punkte)**

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ zwei in einem Punkt z_0 reell differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln:

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \overline{\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(z_0)}$ und $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = \overline{\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial z}(z_0)}$;

(b) $\dfrac{\partial (fg)}{\partial z}(z_0) = f(z_0)\dfrac{\partial g}{\partial z}(z_0) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)g(z_0)$;

Bitte wenden!

(c) Ist $V \subseteq \mathbb{C}$ offen, ist $f(z_0) \in V$, und ist $h\colon V \to \mathbb{C}$ in $f(z_0)$ reell differenzierbar, so gilt

$$\frac{\partial (h \circ f)}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial h}{\partial z}(f(z_0))\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial h}{\partial \bar{z}}(f(z_0))\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(z_0).$$

Wie lauten die zu (b) und (c) analogen Rechenregeln für die partielle Ableitung nach $\bar{z}$?

Aufgabe 4 **(4+3+3=10 Punkte)**

Zeigen Sie:

(a) f ist genau dann reell differenzierbar in z_0, wenn $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ existieren mit

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \alpha h + \beta \bar{h} + o(h) \qquad \text{für } h \to 0;$$

in diesem Fall sind α und β eindeutig bestimmt, und es gilt

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \qquad \text{und} \qquad \beta = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0).$$

(b) f ist genau dann komplex differenzierbar in z_0, wenn f in z_0 reell differenzierbar ist und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ gilt.

(c) Es gibt eine überall reell, aber nirgends komplex differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Aufgabe 5* **(10 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die durch

$$f: \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}\,, \qquad z \mapsto \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right),$$

definierte Funktion f auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ holomorph ist. Geben Sie für alle $c > 0$ die geometrische Beschreibung der Höhenlinien

$$H_f(c) := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |f(z)| = c\}$$

an und zeigen Sie, da $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ und $f(\mathbb{T} \setminus \{1\}) = \mathbb{T}$ gilt. Hierbei bezeichne $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$ deren Rand. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, sei $z_0 \in U$, und sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine Funktion.

Informationen

- Bitte beachten Sie, dass eine Anmeldung zu den Übungen nur bis zum 27.04.2007 möglich ist.
- Wegen des Feiertages am Dienstag, den 01. Mai findet die Abgabe dieses Übungsblattes in der Vorlesung am Montag, den 30.04.2007 statt. Die Dienstagsübungsgruppe wird in dieser Woche auf Donnerstag, den 03. Mai von 16 - 18 Uhr in den Zeichensaal verlegt.
- Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss07/ft/uebungen.html`