UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Sommersemester 2007

Blatt 3

Abgabe: Dienstag, 08.05.2007 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS 002, Gebäude E1 3 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'FT SS 07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\left|\frac{a-z}{1-\overline{a}z}\right| < 1 \Longleftrightarrow |z| < 1; \qquad \left|\frac{a-z}{1-\overline{a}z}\right| = 1 \Longleftrightarrow |z| = 1.$$

Aufgabe 2 **(5+5=10 Punkte)**

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt auf Ω *harmonisch*, falls $\Delta f \equiv 0$ auf Ω gilt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $f \in C^2(\Omega, \mathbb{C})$ auf Ω holomorph, so sind die Funktionen f, $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ auf Ω harmonisch.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \log(|z|)$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ harmonisch.

Aufgabe 3 **((3+3+3)+4=13 Punkte)**

(a) Untersuchen Sie, in welchen Punkten aus $\mathbb{C}$ die folgenden Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar sind.

(i) $f(x+iy) = xy + i(y^2 - x^2 + 40)/2$.

(ii) $f(x+iy) = \exp(y) - i\exp(x)$.

(iii) $f(z) = z \operatorname{Re} z$.

(b) Bestimmen Sie eine komplex differenzierbare Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = i$, für deren Realteil $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gilt

$$u(x,y) = 2x^3y - 2xy^3 + x^2 - y^2.$$

Aufgabe 4 **(7 Punkte)**

Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine in $a \in D$ komplex differenzierbare Funktion und sei $D^* = \{\overline{z}; z \in D\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g : D^* \to \mathbb{C}, \quad g(z) = \overline{f(\overline{z})}$$

in $\overline{a}$ komplex differenzierbar ist und $\overline{f'(a)}$ die Ableitung $g'(\overline{a})$ ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 5* **(2+3=5 Punkte)**

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ und $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ harmonische Funktionen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $f + g$ ist harmonisch.

(b) $f \cdot g$ ist harmonisch.

Informationen

- Raumänderung: Die Donnerstagsübungsgruppe findet im Zeichensaal und nicht wie angekündigt im SR 5 statt.
- Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss07/ft/uebungen.html`