



Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie  
Sommersemester 2007

Blatt 4

**Abgabe:** Dienstag, 15.05.2007 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS 002, Gebäude E1 3 oder  
bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'FT SS 07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

---

**Aufgabe 1**

(10 Punkte)

Verifizieren Sie den Satz von Green für das Integral

$$\int_{\gamma} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy,$$

wobei  $\gamma$  der im positiven Sinne durchlaufene Rand des in  $[0, 1] \times [0, 1]$  enthaltenen Gebietes ist, welches zwischen den Kurven  $y = x^2$  und  $y^2 = x$  liegt.

---

**Aufgabe 2**

(3x4=12 Punkte)

Benutzen Sie die (verallgemeinerte) Cauchysche Integralformel um folgende Integrale zu berechnen:

(a)  $\int_{\partial D_2(0)} \frac{\sin z}{z+i} dz.$

(b)  $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{1-z}}{z^3(1-z)} dz.$

(c)  $\int_{|z|=r} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)^m} dz,$  wobei  $n, m \geq 1$  und  $|a| < r < |b|$  gilt.

(Alle Integrale sollen im mathematisch positiven Sinne integriert werden.)

---

**Aufgabe 3**

(5+5=10 Punkte)

Sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $a > 1$ .

(a) Berechnen Sie das folgende Integral mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel

$$\int_{\partial D_1(0)} \frac{1}{z^2 + 2az + 1} dz.$$

(b) Berechnen Sie mit Teil (a) das reelle Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos x} dx.$$

---

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 4****(8 Punkte)**

Durch die Vorschrift

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{1}{w(w-z)} dw$$

wird auf  $D_1(0)$  eine holomorphe Funktion  $f_1$  und auf  $\mathbb{C} \setminus \overline{D_1(0)}$  eine holomorphe Funktion  $f_2$  definiert. Bestimmen Sie  $f_1$  und  $f_2$ .

---

**Aufgabe 5\*****(3+3=6 Punkte)**

Sei  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch  $\gamma(t) := ae^{it} + be^{-it}$  mit  $a > b > 0$ . Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a)  $\int_{\gamma} z dz.$

(b)  $\int_{\gamma} z^2 dz.$

---

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

[www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss07/ft/uebungen.html](http://www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss07/ft/uebungen.html)