UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Sommersemester 2007

Blatt 4

Abgabe: Dienstag, 15.05.2007 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS 002, Gebäude E1 3 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'FT SS 07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**

Verifizieren Sie den Satz von Green für das Integral

$$\int_\gamma (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy,$$

wobei γ der im positiven Sinne durchlaufene Rand des in $[0,1] \times [0,1]$ enthaltenen Gebietes ist, welches zwischen den Kurven $y = x^2$ und $y^2 = x$ liegt.

Aufgabe 2 **(3x4=12 Punkte)**

Benutzen Sie die (verallgemeinerte) Cauchysche Integralformel um folgende Integrale zu berechnen:

(a) $\displaystyle\int_{\partial D_2(0)} \frac{\sin z}{z+i}\, dz.$

(b) $\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{1-z}}{z^3(1-z)}\, dz.$

(c) $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)^m}\, dz$, wobei $n, m \geq 1$ und $|a| < r < |b|$ gilt.

(Alle Integrale sollen im mathematisch positiven Sinne integriert werden.)

Aufgabe 3 **(5+5=10 Punkte)**

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $a > 1$.

(a) Berechnen Sie das folgende Integral mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel

$$\int_{\partial D_1(0)} \frac{1}{z^2 + 2az + 1}\, dz.$$

(b) Berechnen Sie mit Teil (a) das reelle Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos x}\, dx.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 4 **(8 Punkte)**

Durch die Vorschrift

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} \frac{1}{w(w-z)}\, dw$$

wird auf $D_1(0)$ eine holomorphe Funktion f_1 und auf $\mathbb{C} \setminus \overline{D_1(0)}$ eine holomorphe Funktion f_2 definiert. Bestimmen Sie f_1 und f_2.

Aufgabe 5* **(3+3=6 Punkte)**

Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma(t) := ae^{it} + be^{-it}$ mit $a > b > 0$. Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\displaystyle\int\limits_{\gamma} z\, dz.$

(b) $\displaystyle\int\limits_{\gamma} z^2\, dz.$

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss07/ft/uebungen.html`