UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Sommersemester 2007

Blatt 5

Abgabe: Dienstag, 22.05.2007 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS 002, Gebäude E1 3 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'FT SS 07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1 **(5+5=10 Punkte)**

Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und sei $p \in \mathbb{C}[Z]$ ein Polynom vom Grad n. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $C > 0$ und gilt

$$|f(z)| \leq C|p(z)| \tag{1}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $f = \lambda p$.

(b) Gibt es Konstanten $R > 0$ und $C > 0$, so dass (1) für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ gilt, so ist f ein Polynom vom Grad $\leq n$.

Aufgabe 2 **(8 Punkte)**

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass f konstant ist, wenn $\operatorname{Re} f$ ein lokales Maximum in G hat.

Aufgabe 3 **(5+5=10 Punkte)**

(a) Sei

$$f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{1\})$ mit

$$|f(z)| = 1 \qquad (z \in \mathbb{T} \setminus \{1\})$$

gilt, wobei $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$. Ist f beschränkt auf $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$?

(b) Die Menge

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\}$$

ist ein Gebiet in $\mathbb{C}$ mit $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R}$.

Geben Sie eine stetige, unbeschränkte Funktion $f : \mathbb{H}^- \to \mathbb{C}$ mit $f|_{\mathbb{H}} \in \mathcal{O}(\mathbb{H})$ an, die auf $\partial\mathbb{H}$ beschränkt ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 **(4x3=12 Punkte)**

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante ganze Funktion, dann ist Bild $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$.

(b) Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und ist Im f beschränkt, so ist f konstant.

(c) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und sei $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{H} := \{w \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}\ w > 0\}$, dann ist f konstant.

(d) Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz und gibt es zwei über $\mathbb{R}$ linear unabhängige komplexe Zahlen w_1 und w_2 mit
$$f(z + w_1) = f(z + w_2) = f(z)$$
für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.

Aufgabe 5* **(3+3=6 Punkte)**

Berechnen Sie die Integrale:

(a) $$\int_{\partial D_4(0)} \frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^3}\, dz.$$

(b) $$\int_{|z-2|=3} \frac{e^{i\cos z}\sin(z^4+1) - z}{(z-7)^{2007}}\, dz.$$

Informationen

- Wegen des Feiertages am Donnerstag, den 17.05.2007 wird die Übung auf Dienstag, den 15.05.2007 von 16-18 Uhr in den Hörsaal III verlegt.
- Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss07/ft/uebungen.html`