



Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2007

Blatt 6

Abgabe: Dienstag, 29.05.2007 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS 002, Gebäude E1 3 oder
bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'FT SS 07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1

(8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ eine holomorphe Funktion, so dass $f(a) = a, f(b) = b$ für verschiedene Punkte $a, b \in \mathbb{D}$. Zeigen Sie:

- (a) f ist ein Automorphismus von $\mathbb{D}$.
 - (b) $f(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{D}$.
-

Aufgabe 2

(10 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $L \subset \mathbb{C}$ eine Gerade. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes 3.4 von Morera: Ist f eine auf Ω stetige und auf $\Omega \setminus L$ holomorphe Funktion, so ist f schon auf ganz Ω holomorph.

Aufgabe 3

(10 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und symmetrisch zur reellen Achse, d. h. es gilt $\bar{z} \in \Omega$ für alle $z \in \Omega$. Zeigen Sie, dass für eine auf $\Omega_+ := \{z \in \Omega; \operatorname{Im} z \geq 0\}$ stetige und auf $\Omega_+^0 := \{z \in \Omega; \operatorname{Im} z > 0\}$ holomorphe Funktion f durch

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in \Omega_+ \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{für } \bar{z} \in \Omega_+^0 \end{cases}$$

eine auf ganz Ω holomorphe Funktion $\tilde{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definiert wird.

Aufgabe 4

(4x3=12 Punkte)

Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4-2i}{5+i} \right)^n (z-i)^n.$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} (in^2 + 2^n) z^{2n}.$

Bitte wenden!

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (1 + i^n)^{\frac{n+1}{2}} z^n.$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+i} \right) (z+2)^n.$

Aufgabe 5*

(6 Punkte)

Entwickeln Sie die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$$

in eine Potenzreihe um $z_0 = 0$ und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss07/ft/uebungen.html