UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Sommersemester 2007

Blatt 7

Abgabe: Dienstag, 05.06.2007 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS 002, Gebäude E1 3 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'FT SS 07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1 **(7 Punkte)**

Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ mit

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \qquad \text{und} \qquad f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}?$$

Aufgabe 2 **(6+6=12 Punkte)**

Die Potenzreihe $f(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiere für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für $r \in [0, 1)$ gilt

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

(b) Ist f auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ beschränkt, so ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \qquad \text{und} \qquad \sqrt{1-r} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \to 0 \text{ für } r \to 1^-.$$

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine lokal beschränkte Folge in $\mathcal{O}(G)$, die auf einer nicht diskreten Menge $M \subset G$ punktweise gegen eine Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ kompakt gegen f konvergiert.

Aufgabe 4 **(3+(4+4)=11 Punkte)**

(a) Gibt es eine ganze Funktion f mit der Eigenschaft

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{|n|}$$

für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$?

Bitte wenden!

(b) Untersuchen Sie, ob es eine holomorphe Funktion $g : D_1(0) \to \mathbb{C}$ gibt, die folgende Bedingungen erfüllt und geben Sie diese gegebenenfalls an:

(i) $f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{n}$ und $f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $f^{(n)}(0) = (n+1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 5* **(3+3=6 Punkte)**

Bestimmen Sie mit einem Potenzreihenansatz jeweils eine ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

(a) $f(0) = 1$ und $f'(z) = zf(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) $f(0) = 0$ und $f'(z) = 3f(z) + 2$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ss07/ft/uebungen.html`